

Analiza Matematyczna

Rafał Włodarczyk

INA 1 Sem. 2023

Spis treści

1	Wykład I	3
1.1	Aksjomat Zupełności	4
1.2	Wartość bezwzględna	5
2	Wykład II	5
2.1	Ciąg Liczbowy	5
2.2	Ciąg monotoniczny	6
2.3	Granica ciągu liczbowego	6
3	Wykład III	6
3.1	Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym	6
3.2	Podciąg ciągu	7
3.3	Punkt skupienia ciągu	7
3.4	Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa	7
3.5	Ciąg Cauchy'ego	8
4	Wykład IV	9
4.1	Warunek konieczny zbieżności szeregów	9
4.2	Kryteria zbieżności szeregów	10
4.3	Funkcje	12
5	Wykład V	13
5.1	Trygonometria	13
5.2	Funkcje odwrotne do trygonometrycznych	14
5.3	Funkcje hiperboliczne	14
5.4	Funkcje sigmoidalne	14
5.5	Funkcje okresowe	15
5.6	Funkcje egzotyczne	15
5.7	(Heine) Granica funkcji	15
5.8	(Cauchy) Granica funkcji	15
5.9	Granice Jednostronne	16
5.10	Granica w nieskończoności	16
5.11	Twierdzenie o arytmetyce granic	16
5.12	Twierdzenie o trzech funkcjach	16
5.13	Notacja duże O, notacja asymptotyczna	17

6	Wykład VI	17
6.1	Asymptoty	18
6.2	Ciągłość funkcji	19
6.3	Mnożenie szeregów	20
6.4	Funkcja $\exp(x)$	20
7	Wykład VII	20
7.1	Pochodna funkcji	20
7.2	Elementarne pochodne	21
7.3	Algebra pochodnych	21
8	Wykład VIII	21
8.1	Suma i iloczyn pochodnych	21
8.2	Odwołanie - odwzorowanie liniowe	22
8.3	Odwrotność pochodnej	22
8.4	Pochodna ilorazu	22
8.5	Pochodne [e]	22
8.6	Pochodna funkcji odwrotnej	23
9	Wykład IX	23
9.1	Pochodna funkcji złożonej	25
10	Wykład X	27
10.1	Funkcje Hiperboliczne	27
10.2	Interpretacja geometryczna znaku pochodnej	27
10.3	Pochodne wyższych rzędów	27
10.4	Wzór Taylora	27
10.5	Wypukłość funkcji	28
10.6	Nierówność Jensena	28
10.7	Problem optymalizacyjny	28
10.8	Funkcje Sigmoidalne	29
10.9	Error function	29
11	Wykład XI	29
11.1	Techniki całkowania	29
11.2	Całkowanie przez części	30
11.3	Całkowanie przez podstawienie	30
11.4	Paskudny algorytm całkowania funkcji wymiernych	31
12	Wykład XII	32
12.1	Przez części dla całek oznaczonych	32
12.2	Zamiana zmiennych w całkach oznaczonych	32
12.3	Zastosowania całek	33
12.4	Pole pod wykresem	33
12.5	Długość łuku krzywej	33
12.6	Pola powierzchni i objętości brył obrotowych	34
12.7	Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju	34

13 Wykład XIII	35
13.1 Całki oznaczone w nieskończonościach	35
13.2 Splot funkcji	36
13.3 Własności splotu	36
13.4 Kryterium całkowe zbieżności szeregów	38
13.5 Całki niewłaściwe drugiego rodzaju	38
13.6 Całki niewłaściwe z punktem nieciągłości	38
13.7 Całki z parametrem	39
13.8 Funkcja Gamma Eulera	39

1 Wykład I

Liczby naturalne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Definicja 1.0.1. Zasada indukcji matematycznej. Niech będzie dana własność liczb naturalnych, która czyni zadość warunkom:

1. Liczba 1 posiada tę własność.
2. Jeżeli liczba n posiada tę własność, to posiada ją również liczba $n + 1$.

Zasada indukcji matematycznej mówi, że przy tych założeniach każda liczba naturalna posiada tę własność.

Przykład 1.0.1. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. $n = 1$ $L = 1$ $P = \frac{1(1+1)}{2}$
2. $\forall_{n \geq 1} 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \implies 1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Z założenia indukcyjnego mamy:
 $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
Na mocy zasady indukcji matematycznej teza zachodzi $\square$.

Przykład 1.0.2. Nierówność Bernoulli'ego. Niech $a \geq 1$, wówczas dla dowolnego n naturalnego zachodzi nierówność: $(1 + a)^n \geq 1 + na$

1. $n = 1$, $L = (1 + a)^1 = 1 + a$, $P = 1 + 1 \cdot a = 1 + a$, $L = P$, własność zachodzi
2. $\forall_{n > 1} (1 + a)^n \geq 1 + na \implies (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) \cdot a$
 $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n \cdot (1 + a) \geq^{ind.} (1 + na)(1 + a)$
 $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1) \cdot a$
Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa.

Liczby Całkowite $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

Definicja 1.0.2. Liczby wymierne $\mathbb{Q}$ to liczby postaci:

$$\frac{p}{q}, \text{ gdzie } p, q \in \mathbb{Z} \text{ oraz } q \neq 0$$

Zbiór liczb wymiernych jest liniowo uporządkowany, to znaczy każde dwie liczby wymierne można połączyć jednym ze znaków:

$$a < b, a > b, a = b.$$

Dodawanie $\mathbb{Q}$

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

Mnożenie $\mathbb{Q}$

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$

Własności:

$$1. \text{ Przemienność } a + b = b + a$$

$$2. \text{ Łączność } a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$3. \text{ Rozdzielność } (a + b)c = ac + bc$$

Uwaga. Jeżeli $(a < c \wedge c < b) \iff a < c < b$. Mówimy wtedy, że c leży między liczbami a i b .

Z twierdzenia Pitagorasa $1^2 + 1^2 = x^2 \implies x = \sqrt{2}$. D-d niewymierności $\sqrt{2}$ jako ćwiczenie.

Własność - zbiór $\mathbb{Q}$ jest zbiorem gęstym.

Niech a, b będą dowolnymi liczbami wymiernymi, takimi że $a < b$. Wówczas istnieje liczba c leżąca między liczbami a i b .

$$\text{np.: } c = \frac{a+b}{2}$$

Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$

Definicja 1.0.3. Mówimy, że zbiór jest ograniczony jeżeli istnieją takie dwie liczby m, M , że:

$$\forall_{x \in X} m \leq x \leq M, X \in [m, M]$$

Uwaga analogicznie ograniczoność z dołu i góry osobno.

Definicja 1.0.4. Kres górny zbioru. Niech X będzie zbiorem ograniczonym z góry.

$$\forall_{x \in X} \exists_M x \leq M$$

Kresem górnym zbioru nazywamy najmniejszą liczbę ograniczającą zbiór X z góry.

$(-\infty, 1)$: kres 1

$(-\infty, 1) \cup (1, 2]$: kres 2

1.1 Aksjomat Zupełności

Każdy ograniczony z góry podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny.

Definicja 1.1.1. Kres dolny zbioru nazywamy największą liczbą ograniczającą zbiór X z dołu.

$$\forall_{x \in X} \exists_m m \leq x$$

$(-1, +\infty)$: kres -1

$(2, +\infty)$: kres 2

Kres górny zbioru i kres dolny zbioru to pojęcia dualne.

1.2 Wartość bezwzględna

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Przykład 1.2.1. Własności:

- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a - b| \leq |a| + |b|$
- $|a| - |b| \leq |a - b|$

Definicja 1.2.1. Współczynnik Newtona. Zakładamy że n, k są liczbami naturalnymi, takimi że $n \geq k$. Współczynnik Newtona określamy wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Własności:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
 2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
 3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
 4. $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$
- Symbol sumy $\sum$
 - Symbol iloczynu Π

Definicja 1.2.2. Nierówność Cauchy'ego - Schwarz'a. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \dots, b_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas zachodzi nierówność:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

lub równoważnie:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

drugi

2 Wykład II

2.1 Ciąg Liczbowy

Definicja 2.1.1. Ciąg liczbowy to funkcja z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{R}$. Stosujemy zapis $a_1, a_2, \dots, a_n$. Przykłady:

- $a_n = c + (n-1)d$ - arytmetyczny
- $b_n = cq^{n-1}$ - geometryczny
- $c_n = n!$
- $d_{n+1} = 2^{d_n}$ - rekurencyjny

2.2 Ciąg monotoniczny

Definicja 2.2.1. Ciąg monotoniczny.

1. a_n jest rosnący $\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n < a_{n+1}$
2. a_n jest malejący $\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > a_{n+1}$
3. a_n jest niemalejący $\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq a_{n+1}$
4. a_n jest nierosnący $\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \geq a_{n+1}$

Analogicznie definiujemy ciąg monotoniczny od pewnego miejsca:

1. a_n jest rosnący od n_0 $\iff \forall_{n > n_0} a_n < a_{n+1}$

2.3 Granica ciągu liczbowego

Definicja 2.3.1. Liczbą graniczną ciągu a_n nazywamy liczbę g , taką że:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n > n_0} |a_n - g| < \varepsilon$$

Piszemy wtedy: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ lub $a_n \rightarrow g$.

$$|a_n - g| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - g < \varepsilon \iff g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$$

3 Wykład III

3.1 Twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym

Twierdzenie 3.1.1. Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

a) Ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.

$$\forall_{n > n_0} a_n \leq a_{n+1} \text{ i } \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n < M \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

b) Ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny.

$$\forall_{n > n_0} a_n \geq a_{n+1} \text{ i } \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > m \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Idea dowodu:

$$A = \{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots, a_n, \dots\} \in \mathbb{R}$$

A - ograniczony, istnieje kres górny zbioru A

Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres

czyli $\sup(A)$ (??) $\sup(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Przykład 3.1.1. Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny: $a_1 = \sqrt{2}$ $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Idea dowodu indukcyjnego:

1. $a_n \leq 2$, indukcja po n
2. $a_n \leq a_{n+1}$, indukcja po n . $a_n \leq a_{n+1} \implies a_{n+1} \leq a_{n+2}$
3. $\sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + a_{n+1}}$ kwadrat stronami rozwiązuje krok indukcyjny

$$\forall_{n \geq 1} a_n \leq 2 \implies a_{n+1} \leq 2$$
$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq_{z.ind} \sqrt{2 + 2} = 2$$

Na mocy twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym istnieje:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = g \\
g &= \sqrt{2 + g} \\
g^2 - g - 2 &= 0 \\
\Delta &= 9 = 3^2 \\
g_1 &= \frac{1+3}{2} = 2 \text{ lub } g_2 = \frac{1-3}{2} = -1, \text{ które nie zachodzi, zatem } \lim a_n = g_1
\end{aligned}$$

3.2 Podciąg ciągu

Definicja 3.2.1. Podciąg ciągu

Niech a_n będzie dowolnym ciągiem. Niech $n_1, n_2, \dots, n_k$ będzie pewnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wówczas ciąg $a_{n_k} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$ Nazywamy podciągiem ciągu.

Przykład 3.2.1. Rozważmy następujące przykłady ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$):

a) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

$a_{2k} = (-1)^n = 1, k \in \mathbb{N}$

$(a_2, a_4, a_6, \dots)$ - podciąg o wyrazach parzystych.

b) $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1, n \in \mathbb{N}$

$(a_1, a_3, a_5, \dots)$ - podciąg o wyrazach nieparzystych.

$S = \{1, -1\}$

c) $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots)$

$a_{2k-1} = 2k - 1$ - podciąg o wyr. nieparzystych.

$a_{2k} = \frac{1}{2k}$ - podciąg o wyr. parzystych.

$S = \{0, \infty\}$ d) $\sin(\frac{n\pi}{3})$ - $\text{plot}(\sin(\frac{n\pi}{3}), (n, 1, 17)) \leftarrow \text{wolframalpha}$

3.3 Punkt skupienia ciągu

Definicja 3.3.1. Liczba s jest punktem skupienia ciągu $a_n \iff s$ jest granicą właściwą lub niewłaściwą pewnego podciągu. Oznaczenie S - zbiór punktów skupienia.

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \implies a_n$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$

- $\sup()$ - superior - kres górny
- $\inf()$ - inferior - kres dolny

Definicja 3.3.2. Granica górna ciągu a_n to kres górny granic podciągu a_n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Definicja 3.3.3. Granica dolna ciągu a_n to kres dolny granic podciągu a_n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$\lim \inf(a_n) \leq \lim \sup(a_n)$, równość dla granicy ciągu.

3.4 Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa

Twierdzenie 3.4.1. Twierdzenie (Bolzano - Weierstrassa). Każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny. (English Wikipedia)

D-d. $\forall_{n \in \mathbb{N}} m \leq a_n \leq M$ Dzielimy przedział $[m_1, M_1]$ na dwa podprzedziały: $[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}]$, $[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1]$. Przynajmniej w jednym z przedziałów jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczmy tę połówkę przez $[m_2, M_2]$. Postępujemy tak dalej i mamy:

$\forall_{k \in \mathbb{N}} m_1 \leq m_k \leq a_{nk} \leq M_k \leq M_1$
 M_k malejący i ograniczony $\implies$ zbieżny g_1
 m_k rosnący i ograniczony $\implies$ zbieżny g_2
 $g_1 = g_2 = g$
 $M_k - m_k = \frac{M_1 - m_1}{2}$
 $M_k \rightarrow g_1; m_k \rightarrow g_2$, ponieważ $\frac{M_1 - m_1}{2^k} \rightarrow 0$

3.5 Ciąg Cauchy'ego

Definicja 3.5.1. Ciąg a_n nazywamy ciągiem Cauchy'ego, wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n, m > n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Twierdzenie 3.5.1. Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny $\iff$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Przykład 3.5.1. $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$
 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2 + 1/2$.

1. x_n jest rosnący $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \iff x_{n+1} > x_n$
2. x_n jest ograniczony (pamiętając, że $\forall_{n > 3} 2^n \leq n!$ czyli $\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^4}, \frac{1}{5!} < \frac{1}{2^5}$)...
Dla $n > 3$ $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \leq$
 $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n}$
 $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^3}$
Istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e = 2.7182\dots$
 $sum(1/k!, (k, 0, 300)) \leftarrow \text{wolframalpha}$

Twierdzenie 3.5.2. Liczba eulera wyraża się wzorem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Twierdzenie 3.5.3. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem takim, że: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.
Wówczas:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e, (1 - \frac{1}{a_n})^{a_n} = \frac{1}{e}$$

Przykład 3.5.2. $\lim((1 + \frac{1}{2n})^{2n})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Własność: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_1 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_2 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{b_n}) = g_1^{g_2}$

Przykład 3.5.3. $\lim(1 - \frac{1}{n})^{n/2} = \lim((1 - \frac{1}{n})^n)^{\frac{n}{2n}} = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Wskazówka: $\lim((1 + \frac{1}{2n})^{n+1}, n \rightarrow \infty)$

Definicja 3.5.2. Szereg o wyrazach nieujemnych. Dla dowolnego ciągu $a_1, a_2, \dots, a_n$ o wyrazach nieujemnych, tworzymy ciąg sum częściowych:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

Przykładowo dla e $S_0 = \frac{1}{0!}, S_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \dots$
Jeżeli ciąg S_n jest zbieżny to piszemy, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_N$$

(granica to suma szeregu)

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq S_N < M$$

Przykład 3.5.4. *apart*(1/(n · (n + 1)), n) ← wolframalpha

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= S_N \\ S_1 &= \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}, \text{ zatem:} \\ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= \\ = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &= \\ = 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ finalnie:} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_N = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) &= 1 \end{aligned}$$

Przykład 3.5.5. $a + aq + \dots + aq^n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, dla $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

Przykład 3.5.6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Przykład 3.5.7. Szereg harmoniczny. $H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$, $\lim_{N \rightarrow \infty} = \infty$, wolny wzrost do ∞
 $H_{2^{n+1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^2+3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \frac{1}{2^3+3} + \dots + \frac{1}{2^3+2^3} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} &\geq 2 \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \dots &\geq 4 \cdot \frac{1}{2^2+2^2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \dots &\geq 8 \cdot \frac{1}{2^3+2^3} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots &\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2} \\ H_{2^{n+1}} &\geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot n = 1 + \frac{1}{2}(n+1) \\ H_{2^{n+1}} &\geq 1 + \frac{n+1}{2} \\ H_{2^n} &\geq 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Założmy, że $2^N = k \implies N = \log_2(k)$

$$H_k \geq 1 + \frac{\log_2(k)}{2} \rightarrow \infty$$

Na mocy twierdzenia o dwóch ciągach $H_k \rightarrow \infty$

4 Wykład IV

4.1 Warunek konieczny zbieżności szeregów

Definicja 4.1.1. Warunek konieczny zbieżności szeregów. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (dla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$).

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Warunek konieczny nie jest wystarczający.

4.2 Kryteria zbieżności szeregów

Twierdzenie 4.2.1. Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny $\iff$ jest ograniczony.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \text{ czy } S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$S_{N+1} - S_N = a_{N+1} > 0, S_N$ - rosnący. Jeżeli S_N jest ograniczony to jest zbieżny.

Wniosek:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ dla } n \geq 2:$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{N} \leq 2$$

Twierdzenie 4.2.2. Kryterium porównawcze. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oraz $a_n, b_n > 0$:

Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} a_n \leq b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Twierdzenie 4.2.3. Jeżeli $\sum_{n > n_0}^{\infty} \leq \sum_{n > n_0}^{\infty}$ i $\sum_{n > n_0}^{\infty} a_n = \infty$ (a_n rozbieżny), to wówczas $\sum_{n > n_0}^{\infty} b_n = \infty$ (b_n rozbieżny).

Wniosek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ dla $p \leq 1$, bo $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Twierdzenie 4.2.4. Twierdzenie o zagęszczaniu. Zakładamy, że $a_n \geq 0$ i $a_{n+1} \leq a_n$.

Wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny.

Przykład 4.2.1. Rozważmy poniższy przykład ciągu:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \implies \text{tw.zag}$$

$$2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8$$

Przykład 4.2.2. Zastosowanie Tw. o zagęszczaniu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R} \text{ zbieżny} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n} \right)^p \text{ jest zbieżny.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n} \right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}} \text{ jest zbieżny dla } p > 1$$

Wniosek 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny dla $p \leq 1$

Definicja 4.2.1. Kryterium d'Alemberta: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$:

- Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
- Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
- Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, to kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbieżności.

Idea d-d:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q, q < 1$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$$

$$a_{n+1} < a_n q$$

$$a_n < a_0 q^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_0 q^{n-1} - \text{zbieżne}$$

Przykład 4.2.3. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{n!}{n^n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Z kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny.

Przykład 4.2.4. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ jest rozbieżny. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} = \infty$)

Przykład 4.2.5. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \text{ Kryterium d'Alamberta nic nie powie.}$$

Przykład 4.2.6. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \frac{n^2+n}{n^2+3n+2} = 1 \text{ Kryterium d'Alamberta nic nie powie.}$$

Simplify (wolframalpha):

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

discreteplot($n^2, (n, 1, 20)$) (wolframalpha)

discreteplot($n^2, n, 1, 20$) (mathematica)

Definicja 4.2.2. Kryterium Cauchy'ego. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq 0$

1. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
2. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \sqrt[n]{a_n} \geq 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
3. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \sqrt[n]{a_n} = 1$, to kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga zbieżności.

Idea:

$\sqrt[n]{|a_n|} < q, 0 < q < 1$ czyli $|a_n| < q^n$ więc $a_n < q^n$ zatem $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ zbieżny.

Przykład 4.2.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, a_n = \frac{n^2}{2^n}$

z kryterium Cauchy'ego: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{1}{2} < 1$ - zbieżny

Przykład 4.2.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{2^n+5^n}, a_n = \frac{7^n}{2^n+5^n}$

z kryterium Cauchy'ego: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{7}{\sqrt[n]{2^n+5^n}} = \frac{7}{5} > 1$ - rozbieżny

Przykład 4.2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n+3^n}$

kryterium Cauchy'ego nie działa: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{\sqrt[n]{5^n+3^n}} \Rightarrow 1$

$a_n = \frac{5^n}{5^n+3^n}$, sprawdźmy warunek konieczny zbieżności:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{5^n+3^n} = 1 \neq 0$$

Ciąg jest rozbieżny.

Definicja 4.2.3. Zbieżność bezwzględna. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dowolnych. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie jeśli: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Przykład 4.2.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ jest zbieżny bezwzględnie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n^2}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ jest zbieżny (kryterium d'Alemberta)

FAKT. Badanie zbieżności bezwzględnej szeregu sprowadza się do badania zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych.

Twierdzenie 4.2.5. Zbieżność bezwzględna implikuje zwykłą zbieżność.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ jest zbieżny} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ zbieżny.}$$

Uwaga: twierdzenie w drugą stronę nie działa.

Przykład 4.2.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nie jest zbieżny bezwzględnie, bo:
 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Twierdzenie 4.2.6. Kryterium Abela (Dirichleta). Niech zachodzą następujące warunki:

1. $a_n \geq 0$
2. $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Wówczas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n \text{ jest zbieżny}$$

Przykład 4.2.12. Pokażmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny. Z kryterium Abela:
 $a_n = \frac{1}{n} \geq 0 \wedge a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ Szereg jest zatem zbieżny.

Przykład 4.2.13. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)(-1)^n a_n = -1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$
 Dalej z kryterium Abela...

Ciągi to funkcje $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

4.3 Funkcje

Analizujemy funkcje $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Definicja 4.3.1. Dziedzina funkcji (domain): $dom(f)$ - zbiór wszystkich x dla których funkcja jest określona.

Definicja 4.3.2. Zbiór wartości (range): $rng(f) = \{f(x) : x \in dom(f)\}$

Definicja 4.3.3. Wykres funkcji (graph): $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in dom(f)\}$

Definicja 4.3.4. Funkcja różnowartościowa (one-to-one function):

$$\forall x, y \in A \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Uwaga. Jeśli $f : A \rightarrow B$ jest różnowartościowa, to istnieje dokładnie jedna funkcja $f^{-1} : rng(f) \rightarrow A$, taka że: $\forall x \in A \quad f^{-1}(f(x)) = x$ oraz $\forall y \in rng(f) \quad f(f^{-1}(y)) = y$.

Definicja 4.3.5. Funkcje monotoniczne $f : A \rightarrow B$:

1. $\forall x, y \in A \quad (x < y \implies f(x) < f(y))$ - rosnąca
2. $\forall x, y \in A \quad (x < y \implies f(x) > f(y))$ - malejąca

3. $\forall x, y \in A (x < y \implies f(x) \leq f(y))$ - niemalejąca (słabo rosnąca)

4. $\forall x, y \in A (x < y \implies f(x) \geq f(y))$ - nierosnąca (słabo malejąca)

Definicja 4.3.6. Złożenie funkcji $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ wówczas:

$$\begin{aligned} g \circ f &: A \rightarrow C \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \end{aligned}$$

Przykład 4.3.1. Rozważmy następujące funkcje i ich złożenia:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$f(x) = x^3 + 1, g(y) = \sin(y)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sin(f(x)) = \sin(x^3 + 1)$$

Przykład drugi:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin(x)) = \sin^3(x) + 1$$

5 Wykład V

Funkcje elementarne.

1. $f(x) = ax + b$ - funkcja liniowa

2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ - funkcja kwadratowa

3. $W(x)$ - wielomian (wymierna)

4. $f(x) = a^x, a > 0$ - funkcja wykładnicza
 $a^b \cdot a^c = a^{b+c}, (a^b)^c = a^{b \cdot c}$

5. $f(x) = \log_a(x), a > 0$ - funkcja logarytmiczna, odwrotna do $f(x) = a^x$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y);$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

6. e - Liczba Eulera - $e \approx 2.7172$

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

$$\log_a(x) = \ln(x) \cdot \log_a(e)$$

5.1 Trygonometria

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \operatorname{Re}(e^{it})$$

$$\sin t = \operatorname{Im}(e^{it})$$

Szeregi liczby Eulera:

$$\bullet \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i-t)^k}{k!} = e^{it}$$

$$\bullet e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [sum(1k!, (k, 0, 1000))]$

Zobaczmy wzór:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ e^{ix} \cdot e^{iy} &= e^{ix+iy} = e^{i(x+y)} =_{def} \cos(x+y) + i\sin(x+y) \\ (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) &= (\cos x)(\cos y) + (\cos x)(\sin y)i + (\sin x)(\cos y) + i^2 \sin x \sin y \\ ((\cos x) + (\cos y) - (\sin x)(\sin y)) &+ i((\cos x)(\sin y) + (\sin x)(\cos y)) \\ Re = Re, Im = Im, &\text{ a zatem d-d.} \end{aligned}$$

Funkcje $tg(x)$, $ctg(x)$, $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
 $plot(tan(x), (x, -20, 20))$

5.2 Funkcje odwrotne do trygonometrycznych

$\sin(x)$ w $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jest bijekcją, dzięki czemu można zdefiniować funkcję odwrotną.

- $\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- $\arctg(x) : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- $\text{arcc}tg(x) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$

5.3 Funkcje hiperboliczne

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Jedynka hiperboliczna:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\begin{aligned} \text{D-d: } \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \\ \frac{e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot e^x + e^{-x} \cdot e^{-x}}{4} - \frac{e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot e^x - e^{-x} \cdot e^{-x}}{4} &= \\ \frac{4e^x \cdot e^{-x}}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Definicja tgh , $ctgh$:

- $tgh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
- $ctgh(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

5.4 Funkcje sigmoidalne

1. funkcja logistyczna $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, $\sigma(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$
 Uogólniona:

$$f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^\alpha}, \alpha > 0$$

2. tangens hiperboliczny $f(x) = tgh(x)$
3. arcus tangens hiperboliczny $f(x) = arctg(x)$
4. error function - funkcja błędu
 $\sigma(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot tgh(\frac{x}{2})$

5.5 Funkcje okresowe

Definicja A - dziedziną f : $\exists_T$ takie, że $\forall_{x \in A} f(x+T) = f(x)$

5.6 Funkcje egzotyczne

1. $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$ - cz. całkowita x . Najw. całkowita nieprzekraczająca x .
 2. $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$ - podłoga liczby x (to samo co część całkowita)
 3. $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$ - sufit liczby x
 4. $sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
- $[5.5] = 5, [4.7] = 4, [-3.4] = -4$

5.7 (Heine) Granica funkcji

Zakładamy, że istnieje $\Delta > 0$ taka, że f jest określona na $(a - \Delta, a) \cup (a, a + \Delta)$ (sąsiedztwie punktu a).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \iff \forall_{x_n} \implies_{a, x_n \neq a} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Przykład 5.7.1. Policzmy granicę następującej funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Weźmy $x_n \rightarrow 0; x_n \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \cdot 0 = 0$

Przykład 5.7.2. Policzmy granicę następującej funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{1} = 2$$

Przykład 5.7.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ - dowód z tw. o trzech funkcjach.

5.8 (Cauchy) Granica funkcji

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in A} 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon$$

Symbolu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ - używamy również na oznaczenie granicy niewłaściwej.

Przykłady:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ nie istnieje $x'_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0, x''_n = \frac{-1}{n} \rightarrow 0$, ale $f(x'_n) \rightarrow \infty, f(x''_n) \rightarrow -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ nie istnieje $x'_n = \frac{1}{2\pi n} \rightarrow 0, x''_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0$, ale $f(x'_n) = 0, f(x''_n) = 1$

5.9 Granice Jednostronne

Granica prawostronna:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g \iff \forall_{x_n \rightarrow a, x_n \neq a, x_n > a} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Granica lewostronna:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g \iff \forall_{x_n \rightarrow a, x_n \neq a, x_n < a} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} |x^2 - x|$ - *limit(abs(x² - x), x → 1, assumptions → rightarrow x > 1)* ← wolfram
Limit{Abs[x² - x], x → 1, assumptions → x > 1} ← mathematica

5.10 Granica w nieskończoności

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g \iff \forall_{x_n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Przykład 5.10.1. Zobaczmy granice w nieskończoności:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = e^\infty = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, o ile $a > 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$

Przykład 5.10.2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \begin{cases} x = -t \\ t \rightarrow \infty \end{cases} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0$

5.11 Twierdzenie o arytmetyce granic

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

5.12 Twierdzenie o trzech funkcjach

Zakładamy, że $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = g$, wtedy:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g$$

Przykład 5.12.1. $\lim (x \cdot \sin(\frac{1}{x})) = 0$
 $0 \leq |x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x| \cdot 1$

Twierdzenie 5.12.1. Definicja z granic ciągów $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, przenosi się na granice funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$$

5.13 Notacja duże O, notacja asymptotyczna

Mamy dwa ciągi $a(n)$, $b(n)$. Mówimy że:

$$a(n) = O(b(n)) \iff \exists_C \exists_{n_0} \forall_{n > n_0} |a(n)| \leq C |b(n)|$$

Przykład 5.13.1. Przykłady notacji big O:

- $a(n) = n^2 - \frac{1}{2}n = O(n^2)$
- $b(n) = \left(\frac{1}{2}\right)n^2 + n = O(n^2)$
 $\forall_{n \geq 1} \frac{1}{2}n^2 + n \leq \frac{1}{2}n^2 + n^2 = \frac{3}{2}n^2, C = \frac{3}{2}$
- $c(n) = a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n + a_0, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$
 $c(n) = O(n^2), c = |a_2| + |a_1| + |a_0|$

Twierdzenie 5.13.1. $f(n) = O(g(n)) \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < \infty$

Zastosowania:

$n^3 - n^2 + 1 = O(n^3)$, ponieważ:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^3} \right| = 1 < \infty$$

Przykład 5.13.2. Przykład ambitny:

Ustalmy k - stała: $\binom{n}{k} = O(n^k)$ - dowód jako zadanie z (*).

Kolejno:

$n^2 + n = O(n^2), n^2 + n = O(n^3)$ - na interesuje najmniejsze O

Definicja 5.13.1. Mówimy, że:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(f(n))$$

Przykład 5.13.3. $\frac{1}{2}n^2 + n = \Theta(n^2)$

Twierdzenie 5.13.2. $\left(\lim \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = g \wedge 0 < g < \infty \right) \implies f(n) = \Theta(g(n))$

Oraz kolejno (zaawansowane):

$$\binom{n}{k} = \Theta(n^k)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}n^k + \Theta(n^{k-1})$$

6 Wykład VI

Przykład 6.0.1. Policzmy granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}, \text{ podstawiając } \frac{1}{x} = t, t \rightarrow \infty \text{ zatem } \lim_{t \rightarrow \infty} t$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}, \text{ podstawiając } \frac{1}{x} = t, t \rightarrow -\infty \text{ zatem } \lim_{t \rightarrow -\infty} t$$

Przykład 6.0.2. Pokażmy, że $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Granica prawostronna:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \text{ podstawienie } x = \frac{1}{t}, \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{t})^t = e$$

Granica lewostronna:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \text{ podstawienie } x = \frac{1}{t}, \lim_{t \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{t})^t, \text{ podstawienie } t = -s,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{s})^{-s} = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

6.1 Asymptoty

Definicja 6.1.1. Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f w punkcie a , jeżeli zajdzie jeden z warunków:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \text{ lub } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

Analogicznie definiujemy asymptotę pionową prawostronną dla $x \rightarrow a^+$.

Definicja 6.1.2. Prosta jest asymptotą pionową jeżeli jest jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną.

Przykład 6.1.1. Asymptoty pionowe mogą wystąpić w punktach poza dziedziną funkcji: $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \implies$ prosta $x = -1$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $f(x)$.

Definicja 6.1.3. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Twierdzenie 6.1.1. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax \end{aligned}$$

Jeżeli te granice nie istnieją to funkcja nie posiada asymptoty ukośnej w ∞ .

Idea dowodu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 &\implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f(x) - (ax + b))}{x} = \frac{0}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) &\implies a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax)) \end{aligned}$$

Twierdzenie 6.1.2. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax \end{aligned}$$

Przykład 6.1.2. Narysujmy wyres funkcji: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$, pokażmy, że prosta $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną $f(x)$ w $\pm\infty$.

$$a_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x-1} = 1$$

$$a_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x-1} = 1$$

$$b_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1$$

$$b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1$$

6.2 Ciągłość funkcji

Definicja 6.2.1. Ciągłość funkcji (Heinego). Zakładamy, że f jest określona na pewnym otoczeniu punktu a , tzn. na przedziale $(a - \Delta, a + \Delta)$ dla pewnego ustalonego $\Delta > 0$. Mówimy, że f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Przykład 6.2.1. Zobaczmy jak w praktyce można zastosować te definicje:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)^2 = (\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1))^2 = (1 + 1)^2 = 2^2 = 4$$

Przykład 6.2.2. Przykłady:

- $f(x) = x^2$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.
- $f(x) = \sin(1/x)$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Twierdzenie 6.2.1. Ciągłość prawostronna (Heinego). Zakładamy, że f jest określona na pewnym prawostronnym otoczeniu punktu a , tzn. na przedziale $(a, a + \Delta)$ dla pewnego ustalonego $\Delta > 0$. Mówimy, że f jest prawostronnie ciągła w punkcie a , wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Analogicznie definiujemy ciągłość lewostronną dla $x \rightarrow a^-, [a - \Delta, a]$

Twierdzenie 6.2.2. Funkcja jest ciągła w punkcie a jeżeli jest jednocześnie ciągła prawostronnie i lewostronnie.

Przykład 6.2.3. Zbadaj ciągłość podanej funkcji w 0 w zależności od parametru a :

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & \text{dla } x \geq 0 \\ x^2 + 1, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Liczymy: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + a) = a$$

$$a = 1$$

Definicja 6.2.2. Ciągłość funkcji (Cauchy'ego). Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Twierdzenie 6.2.3. Jeżeli f, g są ciągłe w punkcie $x_0 = a$, to wówczas:

1. $f(x) \pm g(x)$
2. $f(x) \cdot g(x)$
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$, o ile $g(a) \neq 0$

są ciągłe w punkcie $x_0 = a$.

Wniosek. Wielomiany i funkcje wymierne są ciągłe w swojej dziedzinie. Funkcje trygonometryczne są ciągłe w swojej dziedzinie.

Twierdzenie 6.2.4. Złożenie funkcji ciągłych f, g jest funkcją ciągłą.

$$f \text{ ciągła} \wedge g \text{ ciągła} \implies f \circ g \text{ ciągła}$$

$$\text{Zobaczmy przykład: } \lim_{x \rightarrow a} \left(\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \cos \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} \right) = \cos \left(\frac{1}{a} \right)$$

6.3 Mnożenie szeregów

$$\begin{aligned}(1 + 2x + x^2)(-1 + 3x + x^2 + x^3) &= (1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3)x^3 + (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1)x^4 + (1 \cdot 1)x^5 \\ (a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2\end{aligned}$$

$$c_0 = \sum_{k=0}^0 a_k b_{0-k}; \quad c_1 = \sum_{k=0}^1 a_k b_{1-k}; \quad c_2 = \sum_{k=0}^2 a_k b_{2-k}$$

Twierdzenie 6.3.1. Twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu szeregów.

Zakładamy, że $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$, wtedy $c_0 \sum_{k=0}^0 a_k b_{0-k}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \text{ gdzie } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} - \text{dyskretny spłot}$$

6.4 Funkcja exp(x)

Definicja 6.4.1. Niech $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\exp(x)$ jest poprawnie zdefiniowana. $a_n = \frac{x^n}{n!}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n)!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 \rightarrow$ jest zbieżność bezwzględna $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 6.4.1. Dyskretny spłot exp:

$$\exp(x) + \exp(y) = \exp(x + y)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}$ dyskretny spłot szeregów a_n, b_n
zatem:

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x + y)^n$$

Przykład 6.4.2. $\forall x \in \mathbb{R} \exp(x) > 0$

$$1. \quad x > 0 \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0, \text{ ponieważ } (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1)$$

$$2. \quad \exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1 \\ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0$$

Przykład 6.4.3. Funkcja $\exp(x)$ jest ciągła:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x_0) \exp(h) \\ &= \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \exp(h) = \exp(x_0) \cdot 1\end{aligned}$$

7 Wykład VII

7.1 Pochodna funkcji

Definicja 7.1.1. Pochodna funkcji. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a , jeżeli istnieje granica:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Jeżeli f jest różniczkowalna w każdym punkcie dziedziny, to mówimy, że f jest różniczkowalna. Pochodna jest liniowa, tzn. $(f + g)' = f' + g'$, $(cf)' = cf'$.

7.2 Elementarne pochodne

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$
4. $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
5. $(\sin(x))' = \cos(x)$
6. $(\cos(x))' = -\sin(x)$
7. $(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
8. $(\operatorname{ctg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
9. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$
12. $(\operatorname{arccctg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$

7.3 Algebra pochodnych

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
3. $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
4. $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

8 Wykład VIII

8.1 Suma i iloczyn pochodnych

Twierdzenie 8.1.1. Pochodna sumy jest sumą pochodnych:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

D-d. $(f(x) + g(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = * f'(x) + g'(x)$ (* granica sumy jest sumą granic)

Twierdzenie 8.1.2. CHAIN RULE. Pochodna iloczynu funkcji wyraża się wzorem:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

D-d. $(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x) + f(x)) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (g jest różniczkowalna $\implies$ g ciągła)

Wniosek: $(c \cdot f(x))' = (c)' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$ (Liniiowość pochodnej)

8.2 Odwołanie - odwzorowanie liniowe

$$A : X \rightarrow Y$$

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$$

$$A(c \cdot x) = c \cdot A(x)$$

8.3 Odwrotność pochodnej

Pokaż, że: $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$ (lista zadań)

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

8.4 Pochodna ilorazu

Twierdzenie 8.4.1. Pochodna ilorazu dwóch funkcji $f(x), g(x)$ wynosi:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\begin{aligned} \text{D-d. } \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{-g'(x)}{g(x)^2}\right) = \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \end{aligned}$$

Przykład 8.4.1. Rozważmy poniższy wzór:

$$\forall_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

D-d. Wykorzystujemy wzór dwumianowy Newtona:

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}) - x^n}{h}, \text{ Załóżmy, że } n \geq 2: \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}) - x^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^0 x^n \binom{n}{0} + h^1 x^{n-1} \binom{n}{1} + (\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}) - x^n}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + h x^{n-1} n + (\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}) - x^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + h x^{n-1} n + (\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}) - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} n x^{n-1} + (\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k}) = n x^{n-1} \end{aligned}$$

Przykład 8.4.2. $\frac{d}{dx} (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$

Przykład 8.4.3. Sinus, cosinus:

$$\sin'(x) = \cos(x) \text{ tydzień temu}$$

$$\cos'(x) = -\sin(x) \text{ ćw}$$

Przykład 8.4.4. Policzmy $\tan'(x)$:

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

Przykład 8.4.5. Policzmy $\cot'(x)$:

$$\cot'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{(\sin(x))^2} = \frac{-1}{(\sin(x))^2}$$

8.5 Pochodne [e]

Przykład 8.5.1. Lemat techniczny: $\forall_{n \in \mathbb{R}} |e^n - 1 - h| \leq \frac{|h^2|}{2} e^{|h|} = \frac{h^2}{2} e^{|h|}$

$$e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = 1 + h + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!}$$

$$e^n - 1 - h = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2h^k}{(k+2)! \cdot 2}$$

$$|e^n - 1 - h| \leq \frac{|h|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2|h|^k}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k \cdot 2}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!} \cdot \frac{2}{(k+1)(k+2)} <$$

$$\frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!} = \frac{h^2}{2} e^{|h|}$$

Twierdzenie 8.5.1. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} - 1 \right) = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 - h}{h} = 0 \iff \lim \left| \frac{e^h - 1 - h}{h} \right|$$

$$0 < \frac{|e^h - 1 - h|}{|h|} < \frac{\frac{|h|^2}{2} e^{|h|}}{h} = 0 \text{ Z twierdzenia o trzech ciągach mamy dowód.}$$

Przykład 8.5.2. $(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$

Przykład 8.5.3. $(a^x)' = (e^{\ln(a) \cdot x})' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(a) \cdot (x+h)} - e^{\ln(a) \cdot x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\ln(a) \cdot x} \frac{e^{\ln(a)h} - e^1}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{e^{\ln(a)h} - 1}{\ln(a)h} \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$

8.6 Pochodna funkcji odwrotnej

Twierdzenie 8.6.1. Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej

$y = f(x)$, różniczkowalna i rosnąca (lub malejąca) na $[a, b]$. Niech $f(x_0) = y_0$. Wówczas istnieje funkcja odwrotna $x = f^{-1}(y)$ oraz zachodzi wzór:

$$[f^{-1}(y)]'_{y=y_0} = \frac{1}{[f(x)]'_{x=x_0}}$$

D-d.

Weźmy: $f(x_0 + k) = y_0 + h$

$$[f^{-1}(x)]'_{y=y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(f(x_0+k)) - f^{-1}(f(x_0))}{y_0+h-y_0} =$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{x_0+k-x_0}{f(x_0+k) - f(x_0)} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+k) - f(x_0)}{k}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{[f(x)]'_{x=x_0}}$$

Przykład 8.6.1. $f(x) = e^x$, $e^{x_0} = y_0$, $f^{-1}(y) = \ln(y)$

$$[\ln(y)]'_{y=y_0} = \frac{1}{e^x}'_{x=x_0} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0} \quad (\ln(y))' = \frac{1}{y}$$

Przykład 8.6.2. $\log_a(y)' = \left(\frac{\ln(y)}{\ln(a)} \right)' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{y}$

Przykład 8.6.3. Sprawdźmy zrozumienie tw. o pochodnej funkcji odwrotnej:

$f(x) = \sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y = \sin(x)$

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{(\sin(x))'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Następnie:

$f(x) = \cos(x)$, $x \in [0, \pi]$, $y = \cos(x)$

$$(\arccos(y))' = \frac{1}{(\cos(x))'} = \frac{1}{-\sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Kolejno:

$f(x) = \tan(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $y = \tan(x)$

$$(\arctan(y))' = \frac{1}{(\tan(x))'} = \cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$$

9 Wykład IX

Definicja 9.0.1. Maksimum Lokalne. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona na przedziale $(a - \delta, a + \delta)$. Jeśli:

$$\exists \delta_1 < \delta \forall x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) f(x) \leq f(a)$$

to f ma w punkcie a maksimum lokalne.

Maksimum lokalne właściwe - jw. z $\forall x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1) f(x) < f(a)$

Definicja 9.0.2. Minimum lokalne. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona na przedziale $(a - \delta, a + \delta)$. Jeśli:

$$\exists \delta_1 < \delta \forall x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) f(x) \geq f(a)$$

to f ma w punkcie a minimum lokalne.

Minimum lokalne właściwe - jw. z $\forall x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1) f(x) > f(a)$

Maksima lokalne, maksima lokalne właściwe, minima lokalne i minima lokalne właściwe to ekstrema funkcji!

Twierdzenie 9.0.1. Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie c i posiada w tym punkcie ekstremum to $f'(c) = 0$.

D-d (dla maksimum, dla min. analogicznie):

Niech $h > 0$:

$$f(c + h) \leq f(c), f(c - h) \leq f(c)$$

$$f(c + h) - f(c) \leq 0, f(c - h) - f(c) \leq 0$$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0, \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geq 0$$

$$f^{+'}(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

$$f^{-'}(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geq 0$$

$$f^{+'}(c) = f^{-'}(c) \iff f^{+'}(c) = f^{-'}(c) = 0 \equiv f'(c) = 0$$

Warunek $f'(c) = 0$ ma ekstremum jest tylko warunkiem koniecznym!

Twierdzenie 9.0.2. Twierdzenie Rolle'a. Niech f będzie ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, różniczkowalna wewnątrz (a, b) . Jeśli $f(a) = f(b) = 0$, to istnieje takie c , że $a < c < b$ oraz $f'(c) = 0$.

D-d.

Jeśli f jest stała, $f'(x) = 0$. Wówczas dla wszystkich $x \in (a, b)$ istnieje $c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Jeśli f nie jest stała, to istnieje dodatnia lub ujemna wartość funkcji f .

Niech istnieje wartość dodatnia $M = \sup f(x)$. Z twierdzenia Weierstraśa:

$$\exists c \in (a, b) f(x) : M > 0, a < c < b, f(a) = f(b) = 0$$

Zatem funkcja f osiąga kres górny w punkcie c . To jest maksimum lokalne w punkcie c . $f'(c) = 0$ itd.

Twierdzenie 9.0.3. f - ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna wewnątrz przedziału (a, b) . Wówczas istnieje $0 < \theta < 1$, takie że:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a + \theta(b-a))$$

D-d (pomysł):

Rozważ funkcję $g(x) = f(a) - f(x) + (x - a) \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ i zastosuj tw. Rolle'a.

$$g(a) = 0, g(b) = 0, \exists c \in (a, b) : g'(c) = 0$$

$$c = a + \theta(b - a), \theta \in (0, 1)$$

$$g'(x) = \left(f(a) - f(x) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)' = -f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(a + \theta(b - a)) = 0 \iff f'(a + \theta(b - a)) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \square$$

Wnioski:

1. Jeśli $f'(x) = 0$ dla wszystkich $x \in [a, b]$ to f jest stała na $[a, b]$.

D-d.

$$x_1 < x_2 \in [a, b], \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) = 0$$

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \iff f(x_2) = f(x_1), f(x) \text{ jest stała na } [a, b]$$

2. Jeśli $\forall_{a < x < b} f'(x) = g'(x) \implies f(x) = g(x) + \text{stała}$.

D-d.

$$f'(x) = g'(x) \iff f'(x) - g'(x) = 0 \iff (f(x) - g(x))' = 0 \implies f(x) - g(x) = \text{stała} \iff f(x) = g(x) + \text{stała}$$

Twierdzenie 9.0.4. Reguła de L'Hospitala. Zakładamy, że funkcje f i g są ciągłe na przedziale $[a, b]$. Ponadto $f(a) = g(a) = 0$. Wówczas:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ o ile granica istnieje.}$$

Przykład 9.0.1. Rozważmy podane przykłady: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{2-1}{2+1}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{1} = 4$$

D-d. (szkic) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Podstawmy $x = a + h, h \rightarrow 0^+$. Mamy:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\frac{g(a+h) - g(a)}{h}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(a + \theta_1 h)}{g'(a + \theta_2 h)} \end{aligned}$$

9.1 Pochodna funkcji złożonej

Twierdzenie 9.1.1. Zakładamy, że g i f są różniczkowalne oraz g' jest ciągła. Wówczas:

$$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Przykład 9.1.1. Na przykład:

1. $\left((x^2 + 1)^{100} \right)' = 100(x^2 + 1)^{100-1} \cdot (x^2 + 1)' = 100 \cdot (x^2 + 1)^{99} \cdot 2x$
2. $(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cos(x^2)$
3. $(\sin^2(x))' = 2(\sin(x))^{2-1} \cdot \sin(x)' = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$
4. $(x^n)' = nx^{n-1}$
5. $(x^a)' = ax^{a-1}$

$$6. x^a = (e^{\ln(x)})^a = e^{\ln(x) \cdot a}$$

$$7. (x^a)' = (e^{\ln(x) \cdot a})' = e^{\ln(x) \cdot a} \cdot (\ln(x) \cdot a)' = x^n \cdot \frac{1}{x} \cdot a = x^{a-1} \cdot a$$

FAKT. Uwaga. Regułę de L'Hospitala stosuje się również dla $x \rightarrow a^-$ lub dla $x \rightarrow a^+$. Przy odpowiednich założeniach zachodzą wzory:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Przykład 9.1.2. Rozważmy przykłady:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1)}{0} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(x+1))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$

FAKT. Uwaga. De L'Hospital działa również dla $a = \pm\infty$. Jeśli $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, to:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

FAKT. Regułę de L'Hospitala można stosować również dla wyrażeń nieoznaczonych postaci $\frac{\infty}{\infty}$. Jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, to:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Przykład 9.1.3. Przykład:

- Ustalmy $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Wówczas:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^k)'}{(e^x)'} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} &= \\ \dots &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k!}{e^x} &= 0 \end{aligned}$$
- Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Wówczas $n^k \in O(2^n)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{2^n} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{2^x} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^{\ln(2)x}} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{\ln(2)e^{\ln(2)x}} &= \\ \dots &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k!}{\ln(2)^k \cdot e^{\ln(2)x}} &= 0 \end{aligned}$$

Przykład 9.1.4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x) \cdot x) =$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(x))'}{(\frac{1}{x})'} &= \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} &= 0 \end{aligned}$$

10 Wykład X

1. $\ln(f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$
2. $x^x = e^{\ln(x) \cdot x}$
 $(x^x)' = e^{\ln(x) \cdot x} \cdot \left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right) = x^x \cdot (1 + \ln(x))$
3. $a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$
 $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$
4. $(f(x)^{g(x)})' = (e^{\ln(f(x)) \cdot g(x)})' = e^{\ln(f(x)) \cdot g(x)} \cdot (\ln f(x) \cdot g(x))' =$
 $f(x)^{g(x)} (\ln(f(x)))' \cdot g(x) + g'(x) \cdot \ln(f(x)) =$
 $f(x)^{g(x)} \cdot \left(\frac{f'(x) \cdot g(x)}{f(x)} + g'(x) \cdot \ln(f(x))\right)$

10.1 Funkcje Hiperboliczne

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \sinh'(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x) \\ \cosh'(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)\end{aligned}$$

10.2 Interpretacja geometryczna znaku pochodnej

Jeśli $\forall_{x \in (a,b)} f'(x) > 0$, to f -rosnąca w (a,b) . Analogicznie dla $f'(x) < 0$ to f -malejąca.

10.3 Pochodne wyższych rzędów

$$f', f'', f''', f^{(4)}, \dots, f^{(n)}$$
$$\frac{dx}{dy}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

Przykład 10.3.1. Przykłady:

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(x^n)'' = (nx^{n-1})' = n(n-1)x^{n-2} \dots$
3. $(x^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot x^{n-k}$

10.4 Wzór Taylora

Twierdzenie 10.4.1. Twierdzenie Lagrange'a - przypomnienie.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a + \theta(b-a))$$

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} \cdot f'(a + \theta(b-a))$$

Założmy, że f jest n -krotnie różniczkowalna na $[a, b]$. Wtedy istnieje $0 < \theta < 1$, że:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n$$

Twierdzenie 10.4.2. Wzór Maclaurina.

$b = x, a = 0$

$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n$, gdzie $R_n = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$

$$1. \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdot \cos(\theta x) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right)$$

$$2. f(x) = e^x \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \cdot e^{\theta x}$$

Twierdzenie 10.4.3. Jeśli pochodna rzędu parzystego jest niezerowa to jest ekstremum, jeśli nieparzystego rzędu tylko punktem przegięcia.

Przykład 10.4.1. Zobaczmy funkcje:

$$f(x) = x^3, f'(0) = 0, f''(0) = 0, f'''(0) = 6$$

$$f(x) = x^4, f'(0) = 0, f''(0) = 0, f'''(0) = 0, f^{(iv)}(0) = 4!$$

1. $f'(c) = \dots f^{(2k-1)}(c) = 0 \wedge f^{2k} > 0$, to f ma min. lok. w c
2. $f'(c) = \dots f^{(2k-1)}(c) = 0 \wedge f^{2k} < 0$, to f ma maks. lok. w c
3. $f'(c) = \dots f^{(2k-1)}(c) \neq 0 \wedge f^{2k} = 0$, to f nie ma ekstremum w c

10.5 Wypukłość funkcji

f wypukła na $[a, b] \iff \forall_{\alpha, \beta \in [a, b]: \alpha < \beta} \forall_{t \in [0, 1]} (f(t\alpha + (1-t)\beta) \leq tf(\alpha) + (1-t)f(\beta))$

Funkcja wypukła - tempo wzrostu funkcji rośnie

Twierdzenie 10.5.1. Zakładamy, że f jest różniczkowalna na (a, b) . Wtedy f wypukła na $(a, b) \iff f'$ jest rosnąca. Wnioski:

1. $f''(x) > 0$ na $(a, b) \rightarrow f'$ rosnąca f wypukła
2. $f''(x) < 0$ na $(a, b) \rightarrow f'$ malejąca f wklęsła
3. $f''(x_0) = 0$ jest warunkiem koniecznym istnienia punktu przegięcia w punkcie x_0

Przykład 10.5.1. Badanie wypukłości:

$$f(x) = (1 + x^2)e^x, f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 3) = 0 \rightarrow x_1 = -3, x_2 = -1$$

10.6 Nierówność Jensena

Twierdzenie 10.6.1. Niech f -wypukła na $[a, b]$, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. Wtedy:

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

Dla $n = 2$ jest to po prostu definicja wypukłości.

10.7 Problem opymalizacyjny

Znajdź $MAX(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)$ przy zał, że $x_1 + x_2 + \dots + x_n = const.$ i $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n = \left(\frac{const.}{n} \right)^n$$

$$MAX(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = \left(\frac{const.}{n} \right)^n$$

10.8 Funkcje Sigmoidalne

Definicja 10.8.1. (nieformalna). Funkcje, których wykres jest w kształcie charakterystycznej litery S.

- Funkcja logistyczna - $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

Definicja 10.8.2. (formalna). Funkcja ograniczona, różniczkowalna na $\mathbb{R}$ o dodatniej pochodnej i tylko z jednym punktem przegięcia.

Punkt przegięcia - punkt, gdzie funkcja zmienia się z wypukłej na wklęsłą lub z wklęsłej na wypukłą:

- $\tan(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\arctan(x) \dots$

10.9 Error function

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

11 Wykład XI

11.1 Techniki całkowania

Podstawowe wzory

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in \mathbb{N}$
2. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$, bo $(-\cos(x))' = \sin(x)$
3. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
4. $\int \frac{1}{x} = \ln(|x|) + C$

Twierdzenie 11.1.1. Niech $\int f(x) dx = F(x) + C$, wówczas:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Dowód

$$\left(\frac{1}{a} F(ax+b) + C\right)' = \frac{1}{a} f(ax+b)(ax+b)' = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b)$$

Przykłady:

- $\int \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \sin(nx) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$
- $\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a}) + C = a \cdot \arctan(\frac{x}{a}) + C$
- $\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int (1 - \frac{1}{x+1}) dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x - \ln(|x+1|) + C$

11.2 Całkowanie przez części

Twierdzenie 11.2.1. Twierdzenie o całkowaniu przez części.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Dowód.

$$\int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx = \int f(x)g'(x) + f'(x)g(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx = f(x) \cdot g(x)$$

Przykłady:

- $\int x \sin(x)dx$. Przyjmujemy $f(x) = x, g'(x) = \sin(x)$ Mamy:
 $x(-\cos(x)) - \int 1(-\cos(x))dx = -(x)\cos(x) + \int \cos(x)dx =$
 $= x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$
- $\int x^2 \cos(x)dx$. Przyjmujemy $f(x) = x^2, g'(x) = \cos(x)$ Mamy:
 $= x^2 \cdot \sin(x) - \int 2x \sin(x)dx = x^2 \cdot \sin(x) - 2 \int \sin(x)dx =$
 $= x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + C$
- $\int x^2 \ln(x)dx$. Przyjmujemy $f(x) = \ln(x), g'(x) = x^2$ Mamy:
 $= \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx =$
 $= \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3} = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C$
- $\int x^n \ln(x)dx$ - ćwiczenie.
- $\int \ln(x)dx = \ln(x)x - x + C$
- $\int x^2 e^x dx$. Przyjmujemy $f(x) = x^2, g'(x) = e^x$ Mamy:
 $= x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x =$. Przyjmujemy $f(x) = x, g'(x) = e^x$ Mamy:
 $= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$
- $\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} e^x + C$. Przyjmujemy $f(x) = \sin(x), g'(x) = e^x$ Mamy:
 $= \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x dx$
- $\int \cos(x)e^x$. Przyjmujemy $f(x) = \cos(x), g'(x) = e^x$ Mamy:
 $= \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x dx$
- $\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} e^x + C$

11.3 Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie 11.3.1. Wiedząc, że:

$$\int g(t)dt = G(t) + C, G'(t) = g(t)$$

możemy obliczyć:

$$\int g(w(x))w'(x)dx = G(w(x)) + C$$

bo $(G(w(x)))' = g(w(x))w'(x)$.

Przykład 11.3.1. $\int e^{x^2+x}(2x+1) = e^{x^2+x} + C$

Przykład 11.3.2. $\int (3x+1)^n dx$. Podstawiamy $3x+1=t$, $dx = \frac{1}{3}dt$. Mamy:

$$\int t^n \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^n dt = \frac{1}{3} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{3} \frac{(3x+1)^{n+1}}{n+1}$$

$$(t(x) = 3x+1, \frac{dt(x)}{dx} = 3)$$

Przykład 11.3.3. $\int \sin^3(x) \cos(x) dx$. Przyjmujemy $t = \sin(x)$, $\frac{dt}{dx} = \cos(x)$ Mamy:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4(x)}{4} + C$$

Przykład 11.3.4. $\int e^{x^2} x dx$. Przyjmujemy $t = x^2$, $\frac{dt}{dx} = 2x$ Mamy:

$$\int e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C$$

Przykład 11.3.5. $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} dx$. Przyjmujemy $t = 1 + \sin(x)$ $dt = \cos(x) dx$ Mamy:

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + C = \ln(|1 + \sin(x)|) + C$$

Przykład 11.3.6. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ Przyjmujemy $t = f(x)$ $\frac{dt}{dx} = f'(x)$

Mamy:

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + C = \ln(|f(x)|) + C$$

Przykład 11.3.7. $\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{\cos'(x)}{\cos(x)} dx = \ln(|\cos(x)|) + C$

11.4 Paskudny algorytm całkowania funkcji wymiernych

$W(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q - wielomiany, cel $\int W(x) dx$

W jest właściwą funkcją wymierną jeśli: $\deg(P) < \deg(Q)$

Każdą funkcję wymierną można zapisać jako sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Przykład 11.4.1. $\int \frac{x^3}{x-1} dx = \int (x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}) dx = \int (x^2 + x + 1) dx + \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln(|x-1|) + C$

W dalszej części zakładamy, że: $W(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $\deg P < \deg Q$

Funkcję wymierną właściwą rozkładamy na ułamki proste. (apart wolframalpha)

Twierdzenie 11.4.1. Każda funkcja wymierna właściwa jest sumą ułamków prostych:

1. $\frac{A}{x-a}$
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k = 2, 3, \dots$
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\Delta < 0$
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, $m = 2, 3, \dots$

Przykład 11.4.2. $W(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln(|x-a|) + C$
2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} A + C$, $k = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
3. \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Mx+N}{(x+a)^2+b^2} dx = \\
&= \int \frac{\frac{M}{2} \frac{2(x+a)-Ma+N}{(x+a)^2+b^2}}{dx} = \\
&= \frac{M}{2} \ln(|(x+a)^2+b^2|) + \int \frac{N-Ma}{(x+a)^2+b^2} dx = \\
&= \frac{M}{2} \ln(|(x+a)^2+b^2|) + (N-Ma) \int \frac{1}{(x+a)^2+b^2} dx = \\
&= \frac{M}{2} \ln(|(x+a)^2+b^2|) + (N-Ma) \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{(\frac{x+a}{b})^2+1} dx = \dots \\
&\arctan \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx &\text{ sprowadza się do całek:} \\
&\int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt, \int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt
\end{aligned}$$

Przykład 11.4.3. $\int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt$. Przyjmujemy $x = t^2 + 1$ Mamy:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{2} \frac{x^{-m+1}}{-m+1} = \frac{1}{2} \frac{(t^2+1)^{-m+1}}{-m+1} + C$$

Przykład 11.4.4. Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny:

$$\begin{aligned}
I_m &= \int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt \\
I_{m+1} &= \frac{1}{2m} \frac{t}{(t^2+1)^m} + \frac{2m-1}{m} I_m \\
I_1 &= \arctan(t)
\end{aligned}$$

12 Wykład XII

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 t dt &= \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \\
&= \int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} t + \frac{\sin(2t)}{4} + C \\
\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int a \cos t \sin t dt = \int a^2 \int \cos^2 t dt \dots
\end{aligned}$$

12.1 Przez części dla całek oznaczonych

$$\int f'(x)g(x)dx = |(f(x)g(x))|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Przykład 12.1.1. $\int_1^e \ln(x)dx$, przyjmujemy: $f'(x) = 1, g(x) = \ln(x) \rightarrow f(x) = x, g'(x) = \frac{1}{x} = (x \ln(x))|_1^e - \int_1^e 1dx = e \ln(e) - 1 \ln(1) - x|_1^e = e - (e - 1) = 1$

12.2 Zamiana zmiennych w całkach oznaczonych

Twierdzenie 12.2.1. Twierdzenie o zamianie zmiennych w całkach oznaczonych.

$\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow_{na} [a, b], t \in [\alpha, \beta], \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, to:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Przykład 12.2.1. $\int_0^1 (3x+1)^{10} dx$, przyjmujemy $3x+1 = t, dx = \frac{1}{3}dt$, mamy: $\int_1^4 t^{10} \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int_1^4 t^{10} = \frac{1}{3} | \frac{1}{11} \cdot t^{11} |_1^4 = \frac{1}{3} \frac{4^{11}}{11} - \frac{1}{3} \frac{1}{11}$

Przykład 12.2.2. $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$, przyjmujemy $x = R \cdot \sin(t), \frac{dx}{dt} R \cdot \cos(t)$
 $x = \sin(t)$, to więc $x \in [0, 1] \rightarrow t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 $(\forall x \in [0, 1]) (\exists t \in [0, \frac{\pi}{2}]) \sin(t) = x, t = \arcsin(x)$, mamy:
 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} \cdot R \cdot \cos(t) dt =$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot R \cdot \cos(t) dt = \\
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sqrt{\cos^2(t)} \cos(t) dt = \\
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos(t) \cos(t) dt = \\
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2(t) dt = \\
& R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \\
& R^2 \left(\frac{1}{2}t + \frac{\sin(2t)}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
& \frac{R^2 \pi}{4}
\end{aligned}$$

12.3 Zastosowania całek

12.4 Pole pod wykresem

FAKT. Pole pod wykresem. Dla funkcji $f \geq 0$ określonej na $[a, b]$ pole pod jej wykresem na przedziale $[a, b]$ wynosi $S = \int_a^b f(x) dx$

Przykład 12.4.1. Pole między wykresami $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$ na przedziale $[0, 1]$ wynosi:
 $\int_0^1 \sqrt{x} - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$

Przykład 12.4.2. Pole koła. $x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow y^2 = R^2 - x^2$. Weźmy $x \in [0, R]$, wtedy:
 $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Pole koła: $S = 4 \cdot \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4 \frac{R^2 \pi}{4} = \pi R^2$

12.5 Długość łuku krzywej

FAKT. Długość łuku krzywej funkcji ciągłej f określonej na przedziale $[a, b]$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Przykład 12.5.1. Policzmy długość krzywej $f(x) = x^2$ na $[0, 1]$. Mamy: $\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = F(1) - F(0) = \dots$

FAKT. Ogólna długość łuku krzywej $(x(t), y(t))$ dla $a \leq t \leq b$:

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Dla funkcji $(x, f(x))$ mamy $(x', f'(x)) = (1, f'(x))$ uzyskując poprzedni wzór.

Przykład 12.5.2. Parametryzacja przy użyciu współrzędnych biegunowych:

Okrąg $(R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$ - okrąg o promieniu r

Zatem obwód okręgu wynosi:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \sqrt{(R(-\sin(t)))^2 + (R \cdot \cos(t))^2} dt = \\
& \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))} dt = \\
& \int_0^{2\pi} R dt = \\
& (Rt) \Big|_0^{2\pi} = \\
& 2\pi R
\end{aligned}$$

12.6 Pola powierzchni i objętości brył obrotowych

Przykład 12.6.1. Obrót proporcjonalności prostej $y = ax$ wokół OX tworzy stożek

FAKT. Objętość bryły obrotowej jest dana wzorem:

$$V = \pi \int_0^b f^2(x) dx$$

Przykład 12.6.2. Weźmy $f(x) = x$, zatem $R = 1$ a tworząca $l = \sqrt{2}$. Objętość stożka:

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Sprawdźmy, że } V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 1}{3} = \frac{\pi}{3}$$

FAKT. Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej dane jest wzorem:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

12.7 Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

Rozważmy $\forall_{x>a} f(t)$ jest ciągła na $[a, x]$, wtedy:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a), \text{ dla } F'(x) = f(x)$$

Pytanie - czy istnieje $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \int_a^\infty f(t) dt$?

Przykład 12.7.1. Pytania:

1. Oblicz $\int_0^\infty f(t) dt$
2. Zbadaj zbieżność $\int_0^\infty f(t) dt$

Przykład 12.7.2. Policzmy całkę:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(t) \Big|_0^x &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) - \arctan(0) &= \\ \pi - 0 &= \pi \end{aligned}$$

Przykład 12.7.3. Policzmy całkę:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{t} dt &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(t) \Big|_1^x &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) - \ln(1) &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) &= \infty \end{aligned}$$

Przykład 12.7.4. Policzmy całkę:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos(t) dt &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \cos(t) dt &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(t) \Big|_0^x &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) - \sin(0) &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) &\text{ NIE ISTNIEJE, zatem całka jest rozbieżna} \end{aligned}$$

Przykład 12.7.5. Policzmy całkę:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2+\sqrt[5]{t^2+1}} dt &= \\ f(x) = \frac{1}{1+t^2+\sqrt[5]{t^2+1}} &\leq \frac{1}{1+t^2} = g(x) \\ \int_0^\infty g(t) dt < \infty &\implies \int_0^\infty f(t) dt < \infty \end{aligned}$$

Twierdzenie 12.7.1. Kryterium porównawcze (1 część). Zakładamy że zachodzą następujące własności:

1. $0 \leq g(t) \leq f(t)$ dla $t \in [a, \infty]$
2. $\int_a^\infty f(t)dt < \infty$ jest zbieżna

Wówczas:

$$\int_a^\infty g(t)dt < \infty \text{ jest zbieżna.}$$

Analogicznie $(a = n_0) \wedge (\sum_{t=n_0}^\infty f(t) < \infty) \implies (\sum_{t=n_0}^\infty g(t) < \infty)$ - kryterium porównawcze zbieżności szeregów.

Przykład 12.7.6. $f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 2 + \dots \geq \int_0^\infty f(t)dt$

$$\int_0^\infty f(t)dt \leq \sum_{k=0}^\infty f(k)$$

$$f(0) + \sum_{k=1}^\infty f(k)$$

Zatem:

$$f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + \dots \leq \int_0^\infty f(t)dt$$

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) \leq \int_0^\infty f(t)dt$$

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) \leq \int_0^\infty f(t)dt \leq f(0) + \sum_{k=1}^\infty f(k)$$

Twierdzenie 12.7.2. Kryterium porównawcze (2 część). Zakładamy, że zachodzą następujące własności:

1. $0 \leq f(t) \leq g(t)$ dla $t \in [a, \infty]$
2. $\int_a^\infty f(t)dt$ jest rozbieżna.

Wówczas:

$$\int_a^\infty g(t)dt \text{ jest rozbieżna}$$

Przykład 12.7.7. Policzmy całkę: $\int_1^\infty \frac{1}{t+\sqrt{t}}dt$

Wiemy, że $\frac{1}{t+\sqrt{t}} \geq \frac{1}{t+t}$. Sprawdźmy:

$$\int_1^\infty \frac{1}{2t}dt = \infty$$

Na mocy kryterium porównawczego również $\int_1^\infty \frac{1}{t+\sqrt{t}}dt = \infty$ rozbieżna.

13 Wykład XIII

13.1 Całki oznaczone w nieskończonościach

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt$$

Przykład 13.1.1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt = \int_{-\infty}^0 e^{-|t|}dt + \int_0^{+\infty} e^{-|t|}dt = 2$

13.2 Splot funkcji

Nie będzie na egzaminie.

Definicja 13.2.1. Splot funkcji. Dla odpowiedniej funkcji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy splot:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

$(f * g)(x)$ jest dobrze zdefiniowany:

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt < \infty$$

FAKT. $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ to $(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)$

Mając $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt, f(t) =$

$$\begin{cases} f(t) & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t \leq 0 \end{cases}$$

Oraz $g(x-t)$ analogicznie osiągamy wzór podany wyżej.

`convolve(f, g, t, x)` - splot w wolframalpha

Przykład 13.2.1.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{dla } t > 1 \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} t & \text{dla } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{dla } t \notin [0, 1] \end{cases}$$

Obliczmy splot

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

`convolve(1 * boole(-1 < t < 1), t * boole(0 < t < 1), t, x)`

13.3 Własności splotu

Twierdzenie 13.3.1. Algebra splotu

1. $f * g = g * f$
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$
3. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
4. $a(f * g) = af * g = f * ag$

Dowód.

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \begin{cases} x-t=y \\ \frac{dy}{dt} = -1 \\ t = \infty, y = -\infty \\ t = -\infty, y = \infty \end{cases} =$$

$$\int_{\infty}^{-\infty} g(y)f(x-y)(-1) dy = \quad (1)$$

$$-1 \int_{\infty}^{-\infty} g(y)f(x-y) dy = \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y) dy = \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t) dt = (g * f)(x) \quad (4)$$

□

Twierdzenie 13.3.2. Splot funkcji ciągłych jest ciągły

Dowód. Niech $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi.

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$.

Zdefiniujmy $(f * g)(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x_0 - t)dt$.

Ponieważ $g(x_0 - t)$ jest funkcją ciągłą, a $f(t)$ także jest funkcją ciągłą, to iloczyn $f(t)g(x_0 - t)$ również jest funkcją ciągłą.

Zatem całka $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x_0 - t)dt$ jest funkcją ciągłą. □

Przykład 13.3.1. Wróćmy do przykładu:

$$0 < x - t < 1 \iff x - 1 < t < x$$

$$\int (x - t)dt = [-1, 1] \cap [x - 1, x] \quad (1)$$

1. $x - 1 > 1 \iff x > 2, A \cap B = \emptyset$, splot = zero
2. $x < -1, A \cap B = \emptyset$, splot = zero
3. $x \in (-1, 0), x - 1 < -1 < x < 1, A \cap B = [-1, x]$
 $\int_{-1}^x (x - t)dt = \frac{1}{2}(x + 1)^2$
4. $x \in (0, 1), -1 < x - 1 < x < 1, A \cap B = [x - 1, x]$
 $\int_{x-1}^x (x - t)dt = \frac{1}{2}$
5. $x \in (1, 2), -1 < x - 1 < 1 < x, A \cap B = [x - 1, 1]$
 $\int_{x-1}^1 (x - t)dt = \frac{1}{2} [1 - (x - 1)^2]$

Wynik:

$$(f * g)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{dla } x \in (-1, 0) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{2}[1 - (x-1)^2] & \text{dla } x \in (1, 2) \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Transformata Fouriera zamienia splot na iloczyn.

13.4 Kryterium całkowe zbieżności szeregów

Twierdzenie 13.4.1. Kryterium całkowe zbieżności szeregów.

Niech $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, nieujemną i malejącą. Wówczas:

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \text{ jest zbieżny} \iff \int_a^{\infty} f(t)dt \text{ jest zbieżna}$$

Przykład 13.4.1. Zbadajmy zbieżność $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(x)}$ poprzez: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)}$. Podstawmy $y = \ln(x)$, $dy = \frac{dx}{x}$. Mamy: $\int_{\ln(2)}^{\ln(\infty)} \frac{1}{y} dy = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{y} dy = [ln(y)]_{\ln(2)}^{\infty} = \infty$
Możemy to również pokazać za pomocą kryterium kondensacyjnego.

13.5 Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

Przykład 13.5.1. $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\epsilon^{\frac{1}{2}}) = 2$

Przykład 13.5.2. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow -1^-} \int_{-2}^{\epsilon} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow -1^-} \left. \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} \right|_{-2}^{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow -1^-} \frac{-1}{\epsilon+1} - 1 = \frac{1}{0^-} = +\infty$

Przykład 13.5.3. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \int_{-1}^{\epsilon} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \left. \frac{1}{x} \right|_{-1}^{\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left. \frac{1}{x} \right|_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} -\frac{1}{\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} = +\infty + \infty = +\infty$

$f(t) > 0$, ciągła:
 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

13.6 Całki niewłaściwe z punktem nieciągłości

Definicja 13.6.1. Jeżeli $f(t)$ nie jest ciągła w punkcie a , ale jest ciągła na $[a, a + \delta]$ dla pewnego $\delta > 0$, wówczas:

$$\int_a^{a+\infty} f(t)dt \lim_{\Delta \rightarrow a^+} \int_{\Delta}^{a+\delta} f(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^{a+\delta} f(t)dt$$

Definicja 13.6.2. Jeżeli $f(t)$ nie jest ciągła w punkcie a , ale jest ciągła na $[a - \delta, a]$ dla pewnego $\delta > 0$, wówczas:

$$\int_{a-\infty}^a f(t)dt \lim_{\Delta \rightarrow a^-} \int_{a-\delta}^{\Delta} f(t)dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \int_{a-\delta}^{a-\epsilon} f(t)dt$$

13.7 Całki z parametrem

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \int x^{-p} dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{rozbieżna dla } p \leq 1 \\ \text{zbieżna dla } p > 1 \end{cases}$$

Dla $p < 1$ mamy:

$$\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_0^\infty = \infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \text{rozbieżna dla } p \geq 1 \\ \text{zbieżna dla } p < 1 \end{cases}$$

Wniosek:

$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$ jest rozbieżna dla dowolnego p .

Przykład 13.7.1. $\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^\alpha} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{|x|^\alpha} dx + \int_0^1 \frac{1}{|x|^\alpha} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{|x|^\alpha} dx = \dots$

Przykład 13.7.2. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+|x|^\alpha} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+|x|^\alpha} dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+|x|^\alpha} dx = 2 \int_0^\infty \frac{1}{1+|x|^\alpha} dx = \dots$
 $x \rightarrow \infty : \frac{1}{1+x^\alpha} \sim \frac{1}{x^\alpha}$ Natomiast formalnie z kryterium porównawczego: $\frac{1}{1+x^\alpha} > \frac{1}{x^\alpha \cdot x^\alpha} = \frac{1}{2x^{2\alpha}}, \alpha \leq 1$

13.8 Funkcja Gamma Eulera

Definicja 13.8.1. Funkcja Gamma Eulera. Dla $\alpha > 0$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

1. $a \geq 1$, mamy "osobliwość" tylko w ∞

2. $0 < a < 1$, mamy nieciągłość w 0

Gamma jest poprawnie zdefiniowana, czyli całka niewłaściwa jest zbieżna.

Rozważmy $a \in (0, 1)$:

$$\Gamma(a) = \int_0^1 t^{a-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

$$e^{-t} t^{a-1} < t^{a-1} e^{-t}, \int_0^1 t^{a-1} dt, \text{ zbieżna dla } a \in (0, 1)$$

$$t^{a-1} < 1^{a-1} = 1$$

$$t^{a-1} e^{-t} < e^{-t} \rightarrow \int_1^\infty e^{-t} dt \text{ zbieżna}$$

Rozważmy $a \in (1, \infty)$:

$$\int_1^\infty t^{a-1} e^{-t} dt = \int_1^\infty \frac{t^{a-1}}{e^t} dt$$

$$e^t = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} \geq \frac{t^{\text{ceil}(a)+1}}{(\text{ceil}(a)+1)!} \quad (1)$$

$$\frac{1}{e^t} \leq \frac{(\text{ceil}(a)+1)!}{t^{\text{ceil}(a)+1}} \quad (2)$$

$$\frac{t^{a-1}}{e^t} \leq \frac{(\text{ceil}(a)+1)!}{t^{\text{ceil}(a)+1-a}} \frac{1}{t^2} \leq (\text{ceil}(a)+1)! \frac{1}{t^2} \quad (3)$$

Zatem na mocy kryterium porównawczego $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ jest zbieżna.

Przykład 13.8.1. $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = (-1)e^{-t}|_0^\infty = 1$

Przykład 13.8.2. $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt =$.

Zobaczmy $e^{-t} \rightarrow (-1)e^{-t} \rightarrow f'(t)$ oraz $t^n \rightarrow \frac{t^{n+1}}{n+1} \rightarrow g'(t)$. Mamy: $e^{-t} \frac{t^{n+1}}{n+1} |_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{n+1} t^{n+1} e^{-t} dt =$
 $\frac{1}{n+1} \Gamma(n+2)$.

Rozwiązaniem tej rekurencji jest:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

1. $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1)$
2. $\Gamma(1) = 1$
3. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$