

Analiza Matematyczna II

Rafał Włodarczyk

INA 2 Sem. 2023

Spis treści

1	Wykład I	2
1.1	Iloczyn skalarny	2
1.2	Kąt między wektorami	4
1.3	Metryka	4
1.4	Przestrzeń metryczna	4
1.5	Przestrzeń metryczna dyskretna	5
1.6	Metryka Euklidesowa	5
1.7	Przestrzeń Hilberta	6
1.8	Metryka Manhattan	6
2	Wykład II	6
2.1	Kula otwarta	6
2.2	Granica podwójna	9
2.3	Granice iterowane	9
2.4	Różniczkowanie	9
3	Wykład III	9
3.1	Pochodne cząstkowe	9
3.2	Gradient	12
3.3	Własności gradientu	12
3.4	Gradient iloczynu	12
3.5	Minimum lokalne właściwe	13
3.6	Różniczkowanie złożenia funkcji	14
4	Wykład IV	15
4.1	Ogólny wzór Taylora	18
5	Wykład V	18
5.1	Forma Kwadratowa	18
5.2	Jacobian funkcji	20
6	Wykład VI	21
6.1	Mnożniki Lagrange’a	21
6.2	Całka Lebesgue’a	22

7	Wykład VII	24
7.1	Przykład całki Lebesgue’a	24
7.2	Całki wielokrotne	25
7.3	Twierdzenie Fubiniego	25
7.4	Suma wielokrotna	25
7.5	Pole koła	26
8	Wykład VIII	27
8.1	Twierdzenie o zamianie zmiennych	27
8.2	Współrzędne biegunowe	27
8.3	Współrzędne walcowe	29
9	Wykład IX	30
9.1	Współrzędne sferyczne	30
9.2	Funkcja Beta	31
9.3	Symplesks	32
9.4	Wstęp do równań różniczkowych	33
9.5	Krzywe całkowe równania różniczkowego	33
9.6	Równania różniczkowe z warunkiem początkowym	33
10	Wykład X	34
10.1	Równanie różniczkowe	34
10.2	Równanie różniczkowe z warunkiem	34
10.3	Równania różniczkowe jednorodne	36
10.4	Równanie różniczkowe o rozdzielonych zmiennych	36
10.5	Równanie różniczkowe przez zamianę zmiennych	36
10.6	Równanie różniczkowe liniowe	37
11	Wykład XI	38

1 Wykład I

1.1 Iloczyn skalarny

Definicja 1.1.1. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wszystkich n -wymiarowych wektorów o rzeczywistych współrzędnych.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n\}$$

Każdy wektor w $\mathbb{R}^n$ można zapisać jako uporządkowany zbiór n rzeczywistych liczb, gdzie:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

jest elementem przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a x_i są jego współrzędnymi.

Definicja 1.1.2. Dla $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiujemy iloczyn skalarny jako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Dla dowolnego skalaru $a \in \mathbb{R}$, mnożenie skalarne wektora x przez a jest zdefiniowane jako:

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).$$

Norma (długość) wektora x jest dana wzorem:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Iloczyn skalarny spełnia następujące własności (2. dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$):

1. Przemienność: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. Dysocjatywność względem mnożenia przez skalar: $\langle ax, y \rangle = \langle x, ay \rangle = a\langle x, y \rangle$
3. Rozdzielność względem dodawania wektorów: $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Przykład 1.1.1. Stwórzmy kilka prostych przestrzeni:

- $\mathbb{R}$: Przestrzeń jednowymiarowa, zwana także osią liczbową. Każdy punkt $x \in \mathbb{R}$ jest liczbą rzeczywistą. Długość (moduł) liczby rzeczywistej x jest dana wzorem:

$$|x| = |x_1|$$

gdzie x_1 to współrzędna punktu na osi liczbowej.

- $\mathbb{R}^2$: Przestrzeń dwuwymiarowa, znana jako płaszczyzna kartezjańska. Każdy punkt $x \in \mathbb{R}^2$ jest parą liczb rzeczywistych. Długość (norma) wektora $x = (x_1, x_2)$ w tej przestrzeni jest dana wzorem:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

gdzie x_1 i x_2 to współrzędne punktu na płaszczyźnie.

Twierdzenie 1.1.1. Niech $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wówczas:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

D-d. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Z definicji iloczynu skalarnego:

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Otrzymaliśmy nierówność Cauchy'ego-Schwarza, a zatem dowód.

Wniosek. Nierówność Trójkąta $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Dowód. $|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle + \langle y, x \rangle$
 $= |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 = |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \iff$
 $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \square$

1.2 Kąt między wektorami

Niech $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x}_1 = (x_{11}, x_{12})$, $\vec{x}_2 = (x_{21}, x_{22})$.

$$\cos(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{\vec{x}_1 \odot \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1\| \|\vec{x}_2\|}$$

1.3 Metryka

Rozważmy funkcję:

$$d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

d_n jest metryką w $\mathbb{R}^n$ jeśli spełnia następujące aksjomaty:

1. $d_n(x, y) \geq 0$
2. $d_n(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d_n(x, y) = d_n(y, x)$
4. $d_n(x, z) \leq d_n(x, y) + d_n(y, z)$ – nierówność trójkąta

Przykład 1.3.1. $d_n(x, y) = |x - y|$. Dla $n = 2$:

$$d_2(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

1.4 Przestrzeń metryczna

Definicja 1.4.1. Przestrzenią metryczną nazywamy dowolny zbiór X , pewną funkcję $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, która spełnia następujące aksjomaty:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ dla $x, y \in X$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ dla każdych $x, y, z \in X$

Funkcję d nazywamy metryką, a wartość $d(x, y)$ odległością punktów.

Uwaga. Aksjomat 1 wynika z pozostałych aksjomatów.

$$d(x, y) = \frac{1}{2} (d(x, y) + d(y, x)) \geq \frac{1}{2} d(x, x) = 0, \text{ zatem } d(x, y) \geq 0$$

Twierdzenie 1.4.1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Wówczas:

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}), \quad n \geq 2$$

Dla $n = 2$:

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_2) \quad - \text{oczywiste}$$

Dla $n = 3$:

$$d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \quad - \text{nierówność trójkąta}$$

Krok indukcyjny:

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_n, x_{n+1})$$

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \leq_{ind} d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \quad \square$$

1.5 Przestrzeń metryczna dyskretna

Niech X będzie dowolnym zbiorem, a metryka d jest określona wzorem:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y, \\ 1 & \text{dla } x \neq y. \end{cases}$$

Przestrzeń (X, d) jest przestrzenią metryczną ponieważ spełnia jej aksjomaty:

1. Dla wszystkich $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$:

- Jeśli $x = y$, to $d(x, y) = 0 \geq 0$.
- Jeśli $x \neq y$, to $d(x, y) = 1 \geq 0$.

Zatem w obu przypadkach $d(x, y) \geq 0$.

2. $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$:

Jeśli $d(x, y) = 0$, to z definicji wiemy, że $x = y$.

Z drugiej strony, jeśli $x = y$, to metryka może mieć tylko jedną wartość $d(x, y) = 0$.

3. Symetria: $d(x, y) = d(y, x)$:

Ponieważ metryka dyskretna przyjmuje wartości 0 lub 1, to zarówno $d(x, y)$ jak i $d(y, x)$ są równe:

- Jeśli $x = y$, to $d(x, y) = 0$ oraz $d(y, x) = 0$.
- Jeśli $x \neq y$, to $d(x, y) = 1$ oraz $d(y, x) = 1$.

Zatem w obu przypadkach $d(x, y) = d(y, x)$.

4. Nierówność trójkąta: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ dla wszystkich $x, y, z \in X$:

Rozważmy dowolne $x, y, z \in X$.

- Jeśli $x = z$, to $d(x, z) = 0$, a $d(x, y) + d(y, z) \geq 0$. Nierówność trójkąta jest spełniona.

- Jeśli $x \neq z$, to istnieją dwa przypadki:

- Jeśli $x = y$ lub $y = z$, ale $x \neq z$, to $d(x, y) = 0$ lub $d(y, z) = 0$, ale $d(x, z) = 1$. Wtedy $d(x, y) + d(y, z) = 0 + 1 = 1 \geq 1 = d(x, z)$.
- Jeśli $x \neq y$ i $y \neq z$, to $d(x, y) = 1$ i $d(y, z) = 1$. Wtedy $d(x, y) + d(y, z) = 1 + 1 = 2 \geq 1 = d(x, z)$.

W każdym przypadku nierówność trójkąta jest zachowana, co kończy dowód.

1.6 Metryka Euklidesowa

Metryka Euklidesowa $d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona przez:

$$d_n(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ oraz $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

1.7 Przestrzeń Hilberta

Niech $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ oraz $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ będą wektorami w przestrzeni Hilberta, gdzie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty.$$

Przykłady wektorów:

$$x = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{i}, \dots \right), \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty,$$

co oznacza, że x należy do przestrzeni Hilberta.

Natomiast wektor

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots \right),$$

spełnia warunek

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{i}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty,$$

co oznacza, że y nie należy do przestrzeni Hilberta.

1.8 Metryka Manhattan

Metryka Manhattan między dwoma punktami (x_1, x_2) i (y_1, y_2) w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ jest określona jako:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Metryka ta mierzy sumę bezwzględnych różnic współrzędnych między punktami. Swoją nazwę zawdzięcza podobieństwu do liczenia odległości w miastach, gdzie trzeba poruszać się wzdłuż prostokątnych ulic i alei.

2 Wykład II

2.1 Kula otwarta

Definicja 2.1.1. Kula otwarta w przestrzeni metrycznej Y :

$$K(y_0, r) = \{y \in Y \mid d(y, y_0) < r\}$$

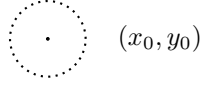
gdzie:

- y_0 - środek kuli,
- r - promień kuli,
- d - funkcja metryczna określająca odległość między punktami w przestrzeni Y .

Przykład 2.1.1. Rozważmy następujący przykład:

$K((x_0, y_0), r)$ to zbiór punktów (x, y) w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, dla których zachodzi warunek:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r.$$



Definicja 2.1.2. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $U \subseteq X$ jest otwarty, jeśli dla każdego $x \in U$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że

$$K(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\} \subseteq U.$$

gdzie $K(x, \varepsilon)$ oznacza kulę otwartą o środku w punkcie x i promieniu $\varepsilon > 0$

Przykład 2.1.2. Przykłady:

(a, b) - jest otwarty

$[a, b)$ - nie jest otwarty

Definicja 2.1.3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.

Zbiór $D \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym $\iff X - D$ jest otwarty.

Przykład: $[a, b] \subset \mathbb{R} \implies \mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ - zbiór otwarty.

Definicja 2.1.4. Niech (X, d_1) i (Y, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi, a $F : X \rightarrow Y$ będzie funkcją. Granicą funkcji $F(x)$ oznaczmy:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b.$$

gdzie $a \in X$ i $b \in Y$.

Warunki (1), (2) są równoważne:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$$

$$2. \text{ dla dowolnego ciągu } (x_n)_{n \geq 0} \text{ punktów przestrzeni metrycznej } X (x_n \neq a) \\ \text{ jeśli } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ w metryce } d_1 \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(0 < d_1(x, a) < \delta) \implies d_2(F(x), b) < \varepsilon$$

Uwaga. Analogicznie dla granicy ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) d_1(x_n, a) < \varepsilon$$

Przykład 2.1.3. $x_n \in \mathbb{R}, a \in X$

$$d_1(x_n, a) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, a) = 0 \text{ w metryce } d_1$$

Przykład 2.1.4. $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n, c_n) = (g_1, g_2, g_3) \text{ w metryce Eulidesowej } \mathbb{R}^3 \iff$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_1 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_2 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g_3$$

Idea:

$$\sqrt{(a_n - g_1)^2 + (b_n - g_2)^2 + (c_n - g_3)^2} \rightarrow 0 \iff a_n \rightarrow g_1 \wedge b_n \rightarrow g_2 \wedge c_n \rightarrow g_3$$

Dla $\mathbb{R}^k$ podane własności zachodzą analogicznie.

Definicja 2.1.5. Ciągłość funkcji. Niech (X, d_1) , (Y, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi, oraz niech $F : X \rightarrow Y$. Funkcja F jest ciągła w punkcie $a \in X$ jeśli zachodzi:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$$

Innymi słowy, jeśli $x_n \rightarrow a$ w metryce d_1 , to $F(x_n) \rightarrow F(a)$ w metryce d_2 .

Przykład 2.1.5. Jak pokazać, że funkcja nie jest ciągła. Weźmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Pokażmy, że f nie jest ciągła w $(0, 0)$. Rozważmy ciąg $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$. Obliczmy granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n)$:

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}$, co nie jest równe 0. Stąd funkcja f nie jest ciągła w punkcie $(0, 0)$.

Przykład 2.1.6. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określoną przez

$$f(x, y, z) = (x^2, y^2 \cdot z)$$

Zbadajmy ciąg $a = (x_0, y_0, z_0)$, gdzie

$$f(x_0, y_0, z_0) = (x_0^2, y_0^2 \cdot z_0)$$

Niech $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$. Oznacza to, że $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$ oraz $z_n \rightarrow z_0$.

$$\lim_{(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)} f(x_n, y_n, z_n) = (x_0^2, y_0^2 \cdot z_0)$$

Przykład 2.1.7.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla } x^2 + y^4 > 0 \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f jest ciągła w $(0, 0)$ $(\alpha t, \beta t) \rightarrow (0, 0)$

$$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha \beta^2 t^3}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4} =$$

$$\frac{\alpha \beta^2 t}{\alpha^2 + \beta^4 t^2} \rightarrow \frac{0}{\alpha^2} = 0 = f(0, 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}$$

f nie jest ciągła $0 = f(0, 0) \neq \frac{1}{2}$, czyli nie tylko liniowa ale też dowolna

Kolejny przykład obalający dla zdef. funkcji $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$, ale już

$$f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2} \neq f(0, 0)$$

Przykład 2.1.8. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = x + y$

$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x, y) = xy$

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \iff (x_n \rightarrow x_0 \wedge y_n \rightarrow y_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x_0 + y_0 = f(x_0, y_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = x_0 y_0 = g(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Przykład 2.1.9. } \lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) &= \\ \lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2}) &= \lim_{x \rightarrow 0}(0) = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0}(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \\ \lim_{y \rightarrow 0}(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2}) & \end{aligned}$$

Nie istnieje

$$(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$$

$$(x''_n, y''_n) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$$

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{1/n \cdot 1/n}{(1/n)^2 + (1/n)^2} = 1/2$$

$$f(x''_n, y''_n) = \frac{-\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{(1/n)^2 + (1/n)^2} = -1/2$$

Ergo rozbieżny - granica podwójna nie istnieje.

2.2 Granica podwójna

Definicja 2.2.1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$

2.3 Granice iterowane

Definicja 2.3.1. $\lim_{x \rightarrow x_0}(\lim_{y \rightarrow y_n} f(x, y))$

$\lim_{y \rightarrow y_0}(\lim_{x \rightarrow x_n} f(x, y))$

2.4 Różniczkowanie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f'(x) = a \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ah}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x) - ah}{h} \right| = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - ah|}{|h|} = 0$$

$$L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, L(h) = ah, h \in \mathbb{R}$$

$$L(h_1 + h_2) = L(h_1) + L(h_2)$$

$$L(ch) = c \cdot L(h) \quad (L \text{ jest odwzorowaniem liniowym})$$

Definicja 2.4.1. (Pochodna funkcji) $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$

Mówimy że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x

jeśli istnieje odwzorowaniem liniowe $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

takie że $h \in \mathbb{R}^n, 0_n = (0, 0, \dots, 0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)\|}{\|h\|} = 0_{\mathbb{R}}$$

3 Wykład III

3.1 Pochodne cząstkowe

Definicja 3.1.1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Przykład 3.1.1. Policzmy następującą pochodne cząstkowe dla funkcji:

$$f(x, y) = x \cdot y^2, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy$$

Definicja 3.1.2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna w x jeśli istnieje odwzorowanie liniowe: $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ taka, że:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)}{|h|} = 0$$

Twierdzenie 3.1.1. Zakładamy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna. Niech: $f = (f_1, f_2, \dots, f_m), f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m: a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), j = 1, 2, \dots, n$. Wówczas macierz pochodnej wynosi:

$$M_{f'(x)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Uwaga. Istnienie wszystkich pochodnych cząstkowych nie wystarcza aby funkcja była różniczkowalna.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Cel. pokażmy że f nie jest różniczkowalna w $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Kandydat na pochodną:

$$M_{f'(0,0)} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right]$$

Warunek różniczkowania: $h = (h_1, h_2)$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| f(h_1, h_2) - f(0, 0) - [0, 0] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

$$(??) \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|h_1^2 h_2|}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}}{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Twierdzenie 3.1.2. Tw. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$. Zakładamy, że pochodne cząstkowe: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ istnieją w otoczeniu punktu x i są ciągłe w punkcie x . Wtedy f jest różniczkowalna w punkcie x .

Przykład 3.1.2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \langle x, x \rangle$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2, \dots$$

$$M_{f'(x)} = [2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n] = 2x$$

$$M_{f'(x)}(h) = 2\langle x, h \rangle$$

Przykład 3.1.3. Z definicji $\frac{|f(x+h) - f(x) - M_{f'(x)}(h)|}{|h|} = \frac{\langle h, h \rangle}{|h|} = \frac{|h||h|}{|h|}$

Jednak algebraicznie $f(x+h) - f(x) - M_{f'(x)}(h) = \langle x+h, x+h \rangle - \langle x, x \rangle - 2\langle x, h \rangle = \langle h, h \rangle$

Przykład 3.1.4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (\sin(t), \cos(t))$

$$M_{f'(t)} = \begin{bmatrix} \sin(t)' \\ \cos(t)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}$$

Definicja 3.1.3. Pochodne kierunkowe: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora $\bar{a}$ nazywamy granicę:

$$(D_a f)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at) - f(x_0)}{t}$$

$$\varphi(t) = f(x_0 + at)$$

$$\varphi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah) - f(x_0)}{h} = (D_a f)(x_0)$$

Przykład 3.1.5. $f(x, y) = \sin(x) \cdot y$

$$x_0 = (0, 0)$$

$$a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$D_a f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)}{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Twierdzenie 3.1.3. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, to:

$$(D_a f)(x_0) = f'(x_0)a^T$$

$$f'(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right]$$

$$f'(x_0)a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)a_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)a_n$$

Definicja 3.1.4. Gradient funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\nabla_{x_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

$$(D_a f)(x_0) = \langle \nabla_{x_0} f, a \rangle$$

Przykład 3.1.6. Policzmy gradient dla: $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$\nabla_{(x_0, y_0)} f(x, y) = (2x_0, 2y_0)$$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

D-d. Zakładamy, że f jest różniczkowalna w x_0 .

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h|}{|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|a|} \left| \frac{f(x_0 + a) - f(x_0) - f'(x_0)t(ta)}{t} \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|a|} \left| \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)(a) \right| \end{aligned}$$

3.2 Gradient

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla_{x_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

3.3 Własności gradientu

Niech $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\nabla_{x_0}(\alpha f) = \alpha \nabla_{x_0}(f)$
2. $\nabla_{x_0}(f + g) = \nabla_{x_0}(f) + \nabla_{x_0}(g)$

Wniosek liniowość (dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$\nabla_{x_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla_{x_0}(f) + \beta \nabla_{x_0}(g)$$

3.4 Gradient iloczynu

$$\nabla_{x_0}(f \cdot g) = \nabla_{x_0}(f) \cdot g(x_0) + f(x_0) \nabla_{x_0}(g)$$

D-d. z liniowości gradientu.

Twierdzenie 3.4.1. Zakładamy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w $x \in \mathbb{R}^n$. Wówczas f jest ciągła w $x \in \mathbb{R}^n$.

D-d. (metryka w $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned} |f(x + h) - f(x)| &= \\ &= |f(x + h) - f(x) - f'(x)h + f'(x)h| \\ &\leq |f(x + h) - f(x) - f'(x)h| + |f'(x)h| = \\ &= \frac{|f(x + h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} |h| = |f'(x)h| \end{aligned}$$

3.5 Minimum lokalne właściwe

Definicja 3.5.1. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$. Mówimy, że f ma w punkcie a minimum lokalne (właściwe) jeśli istnieje $r > 0$:

$$(\forall x \in K(a, r) - \{a\}) f(a) \leq_{(<)} f(x)$$

Gdzie $K(a, r)$ - kula towarta o środku w a i promieniu r .

Twierdzenie 3.5.1. (Warunek konieczny) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$. Jeżeli f ma w punkcie a ekstremum lokalne to:

$$\nabla_{x_0} f = (0, 0, \dots, 0)$$

Inaczej: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$

Przykład 3.5.1. Rozważmy następujące przykłady:

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$ - sprawdźmy warunek konieczny
 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$
 $(0, 0)$ - punkt podejrzany
 $f(\frac{1}{n}, 0) = \frac{1}{n^2} > 0, f(0, \frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^2} < 0$
 Nie istnieje taka $K((0, 0), r)$, że f ma w tej kuli stały znak.
2. $f(x) = x^3, f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}, f(-\frac{1}{n}) \dots$
3. $f(x, y, z) = -x^2 - (y - 1)^2 - (z + 1)^2$
 Sprawdźmy warunek: $\nabla f = (-2x, -2(y - 1), -2(z + 1)) = (0, 0, 0)$
 Zobaczmy $f(0, 1, -1) = 0$
 $f(a, b + 1, c - 1) - f(0, 1, -1) = -a^2 - b^2 - c^2 = -(a^2 + b^2 + c^2) < 0$ maksimum lokalne
 $f(a, b + 1, c - 1) < f(0, 1, -1)$ (liczby sześciannu opisane na kuli)

Definicja 3.5.2. Niech $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}$. Zakładamy, że $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y)$ oraz $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y)$. Wtedy pochodne cząstkowe pochodnych $f_x(x, y), f_y(x, y)$ nazywamy pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu:

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx}(x, y)$
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy}(x, y)$
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{xy}(x, y)$
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{yx}(x, y)$

Twierdzenie 3.5.2. Jeżeli pochodne cząstkowe istnieją w pewnym obszarze i obie są, w pewnym punkcie ciągłe, to w tym punkcie są równe

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} f(x, y) = x^3 y^2$$

$$\frac{d}{dy}(x^3 y^2) = x^3 2y$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 2y) = 3x^2 2y$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2 2y) = 6x 2y$$

$$D \left[x^3 \cdot y^2, (x, 2), (y, 1) \right] \text{ (wolframalpha)}$$

3.6 Różniczkowanie złożenia funkcji

Twierdzenie 3.6.1. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ $a \in \mathbb{R}^n, b = f(a) \in \mathbb{R}^m$. Zakładamy, że f jest różniczkowalna w punkcie a oraz g jest różniczkowalna w punkcie b . Wtedy $g \circ f$ jest różniczkowalna w punkcie a i zachodzi wzór:

$$(g \circ f)(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

Złożenie odwzorowań liniowych - mnożenie macierzy.

Przykład 3.6.1. $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, g = f \circ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

$$g(t) = (f \circ u)(t) = f(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

Zobaczmy:

$$M_{u'(t)} = \begin{bmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \\ u'_3(t) \end{bmatrix} M_{f'(b)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_{x=b}$$

Wykonajmy mnożenie macierzy:

$$M_{f'(b)} \cdot M_{u'(b)} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{du_3}{dt}$$

FAKT. Uogólniona reguła łańcuchowa. $(x_i = u_i(t))$

$$\frac{d}{dt} f(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{du_i}{dt}$$

Przykład 3.6.2. Niech $u(t) = (t^2 - t, 2t, 4t), f(x, y, z) = xy + z, g = f \circ u, g(t) = (t^2 - t)2t + 4t$

$$\begin{aligned} g'(t) &= (t^2 - 1)'2t + (t^2 - t)(2t)' + (4t)' = (2t - 1)(2t) + 2(t^2 - t) + 4 = \\ &= 4t^2 - 2t + 2t^2 - 2t + 4 = 6t^2 - 4t + 4 \end{aligned}$$

Zobaczmy z reguły łańcuchowej:

$$g(t) = (f \circ u)(t)$$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{du_3}{dt}$$

$$y \cdot (2t - 1) + 2x + 1 \cdot 4 = 2t(2t - 1) + 2(t^2 - t) + 4 = 4t^2 - 2t + 2t^2 - 2t + 4 = 6t^2 - 4t + 4$$

W zastosowaniu algorytmu back propagation.

4 Wykład IV

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \exp(x^2)} + \cos(x^2 + \exp(x^2))$$

$\frac{df}{dx}$... można policzyć Graf, jakby liczył komputer:

$$(x) \rightarrow ()^2 \rightarrow a \rightarrow + \quad (1)$$

$$a \rightarrow \exp() \rightarrow b \rightarrow + \rightarrow c \rightarrow \sqrt{} \rightarrow d \rightarrow + \rightarrow f \quad (2)$$

$$c \rightarrow \cos() \rightarrow e \rightarrow + \quad (3)$$

Rozpiszmy $a = x^2, b = \exp(a), c = a + b, d = \sqrt{c}, e = \cos(c), f = d + e$
 $\frac{\partial a}{\partial x} = 2x, \frac{\partial b}{\partial a} = \exp(a), \frac{\partial c}{\partial a} = 1 = \frac{\partial c}{\partial b}, \frac{\partial d}{\partial c} = \frac{1}{2\sqrt{c}}, \frac{\partial e}{\partial c} = -\sin(c), \frac{\partial f}{\partial d} = 1 \frac{\partial f}{\partial e},$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} + \frac{\partial c}{\partial b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial c}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial a}$$

Przykład 4.0.1. Problem. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ przyzwoita - różniczkowalna co najmniej 2 razy, jakie jest maksimum lokalne.

1. $n = 1$ analiza 1.

2. $n = 2$

3. $n \geq 2$

Twierdzenie 4.0.1. Niech $f(x, y)$ ma w otoczeniu punktu (x_0, y_0) pierwsze i drugie pochodne cząstkowe ciągle oraz $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$. Wtedy:

$$W(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Z ciągłości $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

1. Jeśli $W(x_0, y_0) > 0$ i $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, to f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne

2. Jeśli $W(x_0, y_0) > 0$ i $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, to f ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lokalne

3. Jeśli $W(x_0, y_0) < 0$ to f nie ma ekstremum lokalnego w (x_0, y_0)
4. Jeśli $W(x_0, y_0) = 0$ kryterium nie działa
5. (??) $W(x_0, y_0) > 0, f_{xx}(x_0, y_0) = 0, -f_{xy}^2(x_0, y_0) \leq 0$, sprzeczność (z det macierzy)

Jak to liczyć w wolframalpha

1. solve(grad(f(x,y), x,y)=0, (x,y)), (Hessian)
2. det(...)

Przykład 4.0.2. Rozważmy przykład

$$f(x, y) = (2x + y^2)e^x$$

Policzmy najpierw pierwsze pochodne cząstkowe:

$$f_x(x, y) = 2e^x(2x + y^2)e^x$$

$$f_y(x, y) = 2ye^x$$

Rozwiążmy powyższe równanie:

$$y = 0, x = -1$$

Punkt podejrzany o ekstremum $P = (-1, 0)$

Policzmy drugie pochodne cząstkowe:

$$f_{xx} = e^x(4 + 2x + y^2)$$

$$f_{yy} = 2e^x$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2ye^x$$

Zobaczmy:

$$f_{xx}(-1, 0) = 2e^{-1}$$

$$f_{yy}(-1, 0) = 2e^{-1}$$

$$f_{xy}(-1, 0) = f_{yx}(-1, 0) = 0$$

Policzmy wyznacznik z powyższego twierdzenia:

$$W(-1, 0) = 4e^2 > 0, f_{xx} > 0$$

Wobec tego finalnie f ma w punkcie $(-1, 0)$ minimum lokalne.

Przykład 4.0.3. Zobaczmy następny przykład:

$$f(x, y) = x^3 + y^3$$

Policzmy następujące pochodne cząstkowe:

$$f_x(x, y) = 3x^2, f_y(x, y) = 3y^2, f_{xy} = 0, f_{xx}(x, y) = 6x, f_{yy}(x, y) = 6y$$

Wyznacznik macierzy:

$$\det(W(0, 0)) = 0$$

Kryterium nie działa. Nic nam nie powie.

FAKT. Wzór Taylora. Analiza I : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(b+x) = f(b) + \frac{1}{1!}f'(b)x + \frac{1}{2!}f''(b)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(b)x^n + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(b+\theta x) = x^{(n+1)}$$

dla pewnego $\theta \in (0, 1)$

FAKT. Uogólnienie wzoru Taylora : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(t) = f(a+tx) = f(a_1+tx_1, a_2+tx_2, \dots, a_n+tx_n)$$

Dla funkcji $\varphi(t)$ stosujemy wzór Taylora z $b = 0$ i $x = t$:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0)t + \frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)t^n + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(0+\theta t)t^{n+1}$$

Zapiszmy $\varphi(0)$:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= f(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ \varphi'(t)(a_1+tx_1, a_2+tx_2, \dots, a_n+tx_n) &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+tx_1, \dots, a_n+tx_n) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+tx_1, \dots, a_n+tx_n) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1+tx_1, \dots, a_n+tx_n) = \\ \varphi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n \end{aligned}$$

Wprowadźmy $c(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+tx_1, \dots, a_n+tx_n)$. Zachodzi:

$$c'(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}x_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}x_2x_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}x_nx_1$$

Zatem patrząc na $\varphi''(t)$:

$$\varphi''(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} x_j x_i$$

Oznaczenie:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}x_n \right) (f) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 \right\}^2 &= \frac{\partial}{\partial x_1}x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}x_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}x_1x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}x_2x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}x_1x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2}x_2x_2 \end{aligned}$$

4.1 Ogólny wzór Taylora

FAKT. Wzór Taylora. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Zdefiniujmy $D_x = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} x_n \right\}$

$$f(a+x) = f(a) + D_x(f(a)) + \frac{1}{2!} D_x^2(f(a)) + \dots + \frac{1}{n!} D_x^n(f(a)) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} (D_x)^{n+1} (f(a+\theta x))$$

Przykład 4.1.1. Weźmy sobie taką $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Wyznaczmy $D_x(f(a_1, a_2))$:

$$\begin{aligned} D_x(f(a_1, a_2)) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 \right) f(a_1, a_2) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} f(a_1, a_2) x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} f(a_1, a_2) x_2 = 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 \\ (D_x)^2(f(a_1, a_2)) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(a_1, a_2) x_1 x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(a_1, a_2) x_1 x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(a_1, a_2) x_2 x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} f(a_1, a_2) x_2 x_2 = \\ &= 2x_1 x_1 + 0x_1 x_2 + 0x_2 x_1 + 2x_2 x_2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 \\ (a_1 + x_1)^2 + (a_2 + x_2)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 \end{aligned}$$

5 Wykład V

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ekstrema lokalne Weźmy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 2$ - cel. ekstrema lokalne

5.1 Forma Kwadratowa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i y_k$$

zmiennych $y_1, y_2, \dots, y_n$ jest określona dodatnio (ujemnie) jeżeli przybiera wartości dodatnie (ujemne) dla wszystkich $y_1, y_2, \dots, y_n \neq 0$.

Przykład:

$n = 3$ (dziel 2, bo liczymy dwa razy)

$$6y_1^2 + 5y_2^2 + 14y_3^2 + 4y_1y_2 + 8y_1y_3 - 2y_2y_3$$

- $a_{11} = 6, a_{22} = 5, a_{33} = 14$
- $a_{12} = a_{21} = \frac{4}{2} = 2$
- $a_{13} = a_{31} = \frac{-8}{2} = -4$
- $a_{23} = a_{32} = -1$

Sprowadźmy do postaci kanonicznej i przyrównajmy do 0.

$$0 = (y_1 - y_3)^2 + 2(y_1 + y_2 + y_3)^2 + 3(y_2 - y_3)^2 = 0$$

$$y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n = 0$$

Twierdzenie 5.1.1. Twierdzenie Sylwestera.

1. Warunek konieczny i dostateczny na to, aby forma (*) była określona dodatnio (ujemnie) wyraża się ciągiem nierówności:

- $n = 2$: $\det(a_{11}) > (<)0$, $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > (<)0$

- $n = 3$: $\det(a_{11}) > (<)0$, $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > (<)0$

- $n \dots$ itd (pojedynczy wyraz $<$ i $\det$ naprzemiennie dla ujemnych)

Definicja 5.1.1. Forma kwadratowa (*).

1. jest nieokreślona, jeśli przybiera wartości różnych znaków i zeruje się tylko dla $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$
2. półokreślona, jeśli przybiera wartości różnych znaków i zeruje się nie tylko dla $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$

Twierdzenie 5.1.2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Niech $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ma w otoczeniu (kuli otwartej) punktu $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ pierwsze i drugie pochodne cząstkowe ciągłe. Niech $f_{x_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0, f_{x_2}(x_0) = 0, \dots$ (gradient jest zero). Oznaczamy $a_{ik} = f_{x_i x_k}(x_0) = f_{x_i x_k}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

1. Jeżeli forma kwadratowa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i y_k$$

jest dodatnio (ujemnie) określona, to f ma w punkcie $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ minimum (maksimum) lokalne.

2. Jeżeli ww. forma kwadratowa jest nieokreślona to f nie ma w punkcie $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ekstremum.

3. Jeżeli ww. forma kwadratowa jest półokreślona to kryterium nic nie powie

Ilustracja twierdzenia dla $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 = 0$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 = 0$$

$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = 2x_3 = 0$$

$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 0, 0)$ znaleźliśmy punkt podejrzany.

$$a_{11} = 2, a_{22} = 2, a_{33} = 2, a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{31} = a_{13} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. $\det(a_{11}) = 2 > 0$
2. $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = 4 > 0$
3. $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 8 > 0$

Definicja 5.1.2. Otoczeniem punktu $P \in \mathbb{R}^n$ nazywamy dowolny zbiór otwarty U , taka, że $P \in U$

5.2 Jacobian funkcji

Definicja 5.2.1. Jacobian funkcji $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$M_{F'(a)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Jacobian: $J_f(a) = \det(M_{F'(a)})$

Twierdzenie 5.2.1. (O funkcji odwrotnej) Zakładamy, że $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$. Zakładamy, że F ma ciągle pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu punktu a . Zakładamy, że $J_F(a) \neq 0$. Wówczas istnieje otoczenie U punktu a oraz V punktu $F(a)$ oraz funkcja różniczkowalna $\varphi : V \rightarrow U$, taka że:

$$\forall_{x \in U} (\varphi \circ F)(x) = x$$

(Przy powyższych założeniach lokalnie funkcje daje się odwrócić)

Przykład 5.2.1. (Jeden wymiar)

Weźmy $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^2, a > 0$

$F'(a) = 2a, J_F(a) = 2a \neq 0$

$\varphi \circ F(x) = x$

$\varphi = \sqrt{x}$

$\varphi(F(x)) = \sqrt{F(x)}$

Powyższe twierdzenie stanowi uogólnienie dla n wymiarów.

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_0, y_0) = 0$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$x^2 + y^2 = 2$ równanie okręgu.

$y = \pm \sqrt{4 - x^2}$

$\varphi(t) = \sqrt{4 - x^2}$

Szukamy funkcji (istnieje $\varepsilon > 0$) $\varphi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że:

1. $\varphi(x_0) = y_0$
2. $(\forall t \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) f(t, \varphi(t)) = 0$

Twierdzenie 5.2.2. (O funkcji uwikłanej) Jeśli pochodne cząstkowe funkcji f są ciągle oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ to istnieje funkcja φ .

Liczmy:

$$f(t, \varphi(t)) = 0$$

$$\varphi'(t) = ??$$

$$\frac{d}{dt}(f(t, \varphi(t))) = \frac{d}{dt}(0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{d}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d}{dt}(\varphi(t)) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'(t) = 0$$

$$\varphi'(t) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Przypomnienie

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}y'(t)$$

Twierdzenie 5.2.3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Niech f ma ciągle pochodne cząstkowe w punkcie (x_0, y_0) .
Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$(z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0))$ - równanie płaszczyzny przechodzącej przez (x_0, y_0, z_0)

6 Wykład VI

6.1 Mnożniki Lagrange'a

$f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Max/Min $f(x_1, x_2)$ pod warunkiem $g(x_1, x_2)$

Np. Znaleźć Max/Min $x^2 + y^2$ pod warunkiem $xy = 2$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$g(x, y) = xy - 2$$

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(xy) + 2\lambda$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x - \lambda y = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y - \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1. \det \begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{bmatrix} \neq 0, \text{ nie spełnia } xy = 2$$

$$2. \det \begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$4 - \lambda^2 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

$$3. \lambda = -2$$

$$2x + 2y = 0 \iff x = -y$$

Wtedy $2 = (-y)y = -y^2 \leq 0$, nie ma ekstremów

$$4. \lambda = 2$$

$$2x - 2y = 0 \iff x = y$$

$$x^2 = 2 \text{ dwa punkty podejrzane } (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$$

Sprawdzamy warunek dostateczny dla funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$

Policzmy Hessian:

$$f_{xx}(x, y) = 2, f_{xx}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

$$W(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4 > 0$$

W punktach $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ mamy minima lokalne.

Teoria ($n = 2$)

Definicja 6.1.1. Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ jest punktem regularnym zbioru $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ jest $g(a) = 0$ oraz gradient funkcji g w punkcie a jest różny od 0.

Twierdzenie 6.1.1. Jeśli $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ma ekstremum lokalne w punkcie $a \in \mathbb{R}^n$ pod warunkiem, że $g(a) = 0$, to istnieje λ , takie że $\nabla(f - \lambda g)_{x=a} = 0$ o ile a jest punktem regularnym.

Przykład:

$$f(x, y) = xy$$

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

$$\Phi(x, y, \lambda) = xy - \lambda\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y - \frac{\lambda x}{4} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x - \lambda y = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{4} & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1. \det A \neq 0$$

$x = y = 0$, nie ma rozwiązań

$$2. \det A = 0 (\lambda = 2 \vee \lambda = -2)$$

$$\lambda = 2 \implies \left(y = \frac{1}{2}x \wedge \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0\right)$$

$$(2, 1), (-2, -1)$$

$$3. \lambda = -2 \implies \left(y = -\frac{1}{2}x \wedge \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0\right)$$

$$(2, -1), (-2, 1)$$

Badamy max/min:

$$(a) f(2, 1) = 2 \text{ max lok}$$

$$(b) f(-2, -1) = 2 \text{ max lok}$$

$$(c) f(2, -1) = -2 \text{ min lok}$$

$$(d) f(-2, 1) = -2 \text{ min lok}$$

6.2 Całka Lebesgue'a

Przedziały $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n$. $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ Przedział domknięty na $\mathbb{R}^n$.

Definicja 6.2.1. Wnętrze przedziału oznaczamy:

$$\text{Int}([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

Definicja 6.2.2. Niech Π, Δ będą przedziałami. Mówimy, że Π, Δ nie zachodzą na siebie i piszemy, że $\Pi \perp \Delta$ jeśli:

$$\text{Int}\Pi \cap \text{Int}\Delta = \emptyset$$

Definicja 6.2.3. Rodzina przedziałów P jest rozbiem przedziałów Π jeśli:

1. $\bigcup P = \Pi$
2. $\forall P, Q \in P (P \neq Q \implies P \perp Q)$

Definicja 6.2.4. $\text{Vol}(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

Przykład 6.2.1. 1. $\text{Vol}([a, b]) = b - a$

$$2. \text{Vol}([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$$

$$3. \text{Vol}([a, b] \times [c, d] \times [e, f]) = (b - a)(d - c)(f - e)$$

Twierdzenie 6.2.1. Jeśli P jest rozbiem Π to:

$$\text{Vol}(\Pi) = \sum_{p \in P} \text{Vol}(p)$$

Własności:

1. $\Pi \subset \Delta \implies \text{Vol}(\Pi) \leq \text{Vol}(\Delta)$
2. $\Pi \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_n$ to $\text{Vol}(\Pi) \leq \sum_{i=1}^n \text{Vol}\Delta_i$

Definicja 6.2.5. Miara zewnętrzna Lebesgue'a. Ustalamy $n, A \subseteq \mathbb{R}^n, A$ - ograniczony.

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum \text{Vol}(\pi_i) \mid (\forall_i) (\pi_i \text{ jest produktem} \wedge A \subset \bigcup_{n \geq 0} \pi_n) \right\}$$

Oznaczamy $|A| = \lambda^*(A)$

1. $0 \leq |A| \leq \infty$
2. $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$

Twierdzenie 6.2.2. Π jest przedziałem:

$$\lambda^*(\Pi) = \text{Vol}(\Pi)$$

Definicja 6.2.6. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem miary 0, jeśli $\lambda^*(A) = 0$.

1. $n = 2, A = (a, b) \subset \mathbb{R}^2$
 $\lambda^*(B) = (b - a)2\varepsilon$
 $\lambda^*(A) = 0$
2. $\square \in \mathbb{R}^3$ jest miary zero
 $\lambda^*(\mathbb{Q}) = \lambda^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{P_n\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \{P_n\} = \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = 0$

Definicja 6.2.7. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest mierzalny według Lebesgue'a jeśli:

$$\forall Z \subseteq \mathbb{R}^n (\lambda^*(Z \cap A) + \lambda^*(Z \cap A^C) = \lambda^*(Z))$$

Definicja 6.2.8. M_n - rodzina zbiorów mierzalnych. Miarą Lebesgue'a na M_n nazywamy funkcję:

$$\lambda(A) = \lambda^*(A)$$

Funkcje proste $A \subseteq \mathbb{R}^n$, Niech $B \subseteq A$.

$$\mathbf{1} = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in B \\ 0 & \text{dla } x \in A - B \end{cases}$$

Definicja 6.2.9. Niech $A \in M_n$. Funkcję prostą o nośniku A nazywamy funkcję postaci:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{1}_{A,B}(x), a_i \in \mathbb{R}$$

Gdzie $(B_i)_{i=1}^n$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych, mierzalnych, zawartych w A .

7 Wykład VII

Definicja 7.0.1. f prosta $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A,B_i}$.

$$\int_A f = \sum a_i \lambda(B_i)$$

7.1 Przykład całki Lebesgue'a

Przykład: $A \subset \mathbb{R}^m, m = 1$

$$f(x) = 1 \cdot \mathbf{1}_{A,B_1}(x) + 2 \cdot \mathbf{1}_{A,B_2}(x) + 4 \cdot \mathbf{1}_{A,B_3}(x)$$

$$\int_A f = 1\lambda(B_1) + 2\lambda(B_2) + 4\lambda(B_3)$$

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases} \quad A = [0, 1], B_1 = \mathbb{Q} \cap [0, 1], B_2 = [0, 1] - \mathbb{Q}$$

$$D(x) = 1 \cdot \mathbf{1}_{A,B_1}(x) + 0 \cdot \mathbf{1}_{A,B_2}(x)$$

$$\int_{[0,1]} 1\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) + 0\lambda(B_2) = 0$$

Całkowalna w sensie Lebesgue'a, nie istnieje cała Riemanna.

Corollary: $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}$ jest miary zero. Wówczas g jest całkowalna: $\int_{\mathbb{R}^m} g = \int_{\mathbb{R}^m} f$

$$\int g = \int f$$

7.2 Całki wielokrotne

Całkowanie po wielu zmiennych można wykonać po kolei.

$$\int_0^1 \int_0^1 xy dx dy = \quad (1)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 xy dx \right) dy = \quad (2)$$

$$= \int_0^1 \left(\left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=0}^{x=1} \right) dy = \quad (3)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{4} y^2 \right]_0^1 = \quad (4)$$

$$= \frac{1}{4} \quad (5)$$

7.3 Twierdzenie Fubiniego

Twierdzenie 7.3.1. Zakładamy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ jest nieujemna lub całkowalna. Niech $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ definiujemy:

$$f_x(y) = f(x, y)$$

Wtedy:

- dla prawie wszystkich x funkcje f_x są całkowalne
- $\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f \right)$

Przykład: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_{(n+m) \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) dx_1, dx_2, \dots, dy_1, dy_2, \dots, dy_n = \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, \dots, y_n) dy_1, dy_2, \dots, dy_n \right) dx_1, dx_2, \dots, dx_n \end{aligned}$$

7.4 Suma wielokrotna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} = A$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \right)$$

Twierdzenie 7.4.1. Inna wersja twierdzenia Fubiniego.

Niech $A \subset \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ A, B - mierzalne, $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ - nieujemna lub całkowalna. Dla $x \in A$ definiujemy:

$$f_x(y) = f(x, y)$$

Wtedy:

- dla prawie wszystkich x funkcje f_x są całkowalne

- $\int \int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \left(\int_B f_x(y) \right) dy dx$

Funkcja dwóch zmiennych jest całkowalna jeżeli istnieje oszacowanie:

$$|f(x, y)| \leq g(x, y)$$

Prowadzący nt. powyższego "Lepiej żeby to po prostu nie było napisane"

Przykład 7.4.1.

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} (2x + 2y + 2z) dx dy dz$$

Rozbijmy to na całki iterowane:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (2x + 2y + 2z) dx \right) dy \right) dz = \quad (1)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 [x^2 + (2y + 2z)x]_0^1 dy \right) dz = \quad (2)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 1 + 2y + 2z dy \right) dz = \quad (3)$$

$$= \int_0^1 [(1 + 2z)y + y^2]_0^1 dz = \quad (4)$$

$$= \int_0^1 (2 + 2z) dz = [2z + z^2]_0^1 = 3 \quad (5)$$

Integrate[2x+2y+2z,{x,0,1},{y,0,1},{z,0,1}]

$$\text{vol}([a, b] \times [c, d] \times [e, f]) = \lambda_3(\dots) = \int \int \int_P 1 dx dy dz$$

$$\int \dots \int_{[0,1]^n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n = n \frac{1}{3}$$

$$= \sum_{i=1}^n \int \dots \int_{[0,1]^2} (x_i^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n = n \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x_1^2 dx_1 = \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{b_n^3}{3} - \frac{a_n^3}{3} \right) (b_{n-1} - a_{n-1}) (b_{n-2} - a_{n-1}) \dots (b_1 - a_1)$$

7.5 Pole koła

$$K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$-r \leq x \leq r$$

$$-\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\int \int 1 dx dy = \lambda(k) = \pi r^2 dx_n = \int_{-r}^r \left(\int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{\sqrt{r^2 - x^2}} 1 dy \right) dx =$$

$$= \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \frac{\pi i}{2} r^2 = \pi r^2$$

Integrate(sqrt(r^2 - x^2),(x,-r,r))

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Podstawmy $x = rt, dx = rdt$, zatem: $= 2r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = r^2 \frac{\pi}{2}$

Przykład 7.5.1. Policzmy następującą całkę:

$$\int_{\Delta} (x + y) dx dy, x = 0, y = 0, x + y = 1$$

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$$

zatem:

$$A = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x + y) dy \right) dx = \frac{1}{3}$$

Obliczenia:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \\ & = \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - x \right) dx = \\ & = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$A = \int_0^1 \int_0^{1-y} (x + y) dx dy$$

8 Wykład VIII

8.1 Twierdzenie o zamianie zmiennych

Twierdzenie 8.1.1. O zamianie zmiennych : $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest 1-1 i $\mathbb{C}^1$ (różniczkowalna i ciągle pochodne cząstkowe) $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$. Rozważamy macierz Jacobiego:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{J}_{\varphi(x)}) \neq 0$ Niech $f : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła.

$$\int_{\varphi(D)}^n \int f(y) dy_1 dy_2 \dots dy_n = \int_D^n \int f(x) \cdot |\det \mathbf{J}_{\varphi(x)}| dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

8.2 Współrzędne biegunowe

Przykład 8.2.1. Współrzędne biegunowe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x = r \cos(\alpha)$, $y = r \sin(\alpha)$

$$r \in [0, \infty), \alpha \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi(r, \alpha) = (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{J}_{\varphi(r, \alpha)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\varphi(r,\alpha)} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & r(-\sin(\alpha)) \\ \sin(\alpha) & r \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad |\det(\mathbf{J}_{\alpha(r,\alpha)})| = |r \cos^2 \alpha + r \sin^2 \alpha| = |r| = r$$

$$\int_{\varphi D} \int f(x, y) dx dy = \int_D \int f(r, \alpha) r dr d\alpha$$

Przykład 8.2.2. Pole koła o promieniu R

$$\int \int_{x^2+y^2 \leq R^2} 1 dx dy =$$

Podstawmy $x = r \cos(\alpha)$, $y = r \sin(\alpha)$, r : mamy:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r d\alpha \right) dr &= \int_0^R 2\pi r dr = \left| \frac{2\pi r^2}{2} \right|_0^R = \pi R^2 \\ \int \int_{r^2 \leq R^2} r dr d\alpha &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\alpha = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\alpha = \pi R^2 \end{aligned}$$

Przykład 8.2.3.

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(D)} \int f(x, y) dx dy &= \int_D \int f(r, \alpha) r dr d\alpha \\ \int \int_{x^2+y^2 \leq R^2} xy dx dy &= \int_{r \in [0, R]} \int_{\alpha \in [0, 2\pi]} r \cos(\alpha) r \sin(\alpha) r dr d\alpha \end{aligned}$$

Przykład 8.2.4. D, B - jakiś przedział, $\int_D f(y) dy$. Podstawmy $y = \varphi(x)$, $y \in D$, $x \in B$

$$\int_D f(y) dy = \int_B f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

$\int_a^b (x^2+1)^2 dx$ (zob. $x^2+1 = y$, $B = [(a^2+1), (b^2+1)]$, $D = [a, b]$)

Przykład 8.2.5. Objętość elipsoidy obrotowej.

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

$$\text{Vol}(E) = \int \int \int_E dx dy dz$$

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = (x_1 a, y_1 b, z_1 c)$$

$$\mathbf{J}_{\varphi(x_1, y_1, z_1)} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1}(x_1, a) & \frac{d}{dy_1}(x_1, a) & \frac{d}{dz_1}(x_1, a) \\ \frac{d}{dx_1}(y_1, b) & \frac{d}{dy_1}(y_1, b) & \frac{d}{dz_1}(y_1, b) \\ \frac{d}{dx_1}(z_1, c) & \frac{d}{dy_1}(z_1, c) & \frac{d}{dz_1}(z_1, c) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\varphi(x_1, y_1, z_1)} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\int \int \int_E dx dy dz = \int \int \int abc dx_1 dy_1 dz_1 = abc \int \int \int dx_1 dy_1 dz_1 = abc \text{Vol}(K(0, 0, 0), 1)$$

Oszukujemy $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, zatem:

$$\text{Vol} = \frac{4}{3} abc \pi$$

Przykład 8.2.6. Error function.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \mathbb{R}^+ \in [0, \infty)$$

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) = \quad (1)$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-y^2} dy \right) = \quad (2)$$

$$= \int \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \quad (3)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy = \quad (4)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-y^2} \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx \right) dy = \quad (5)$$

$$= \int \int_{r \in [0, \infty]} e^{-r^2} r d\alpha dr = \quad (6)$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \quad (7)$$

$$\left| \frac{\pi - e^{-r^2}}{2} \right|_0^\infty = \frac{\pi}{4} \quad (8)$$

$$(9)$$

Następnie:

$$\int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r d\alpha dr = \quad (1)$$

$$= \int_0^\infty e^{-r^2} r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha = \quad (2)$$

$$= \int_0^\infty e^{-r^2} \cdot r \frac{\pi}{2} = \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \quad (4)$$

$$= \sqrt{\pi} \quad (5)$$

8.3 Współrzędne walcowe

Przykład 8.3.1. Współrzędne walcowe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x = r \cos(\alpha)$, $y = r \sin(\alpha)$, $z = z$
 $r \in [0, \infty)$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$

$$\varphi(r, \alpha, z) = (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha), z)$$

$$\mathbf{J}_{\varphi(r, \alpha, z)} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & r(-\sin(\alpha)) & 0 \\ \sin(\alpha) & r \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|\det(\mathbf{J}_{\varphi(r, \alpha, z)})| = |1 (r \cos^2 \alpha + r \sin^2 \alpha)| = |r| = r$$

$$\int \int \int_K f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_K f(r, \alpha, z) r dr d\alpha dz$$

Przykład 8.3.2. Objętość walca (o promieniu R i wysokości H):

$$\begin{aligned}\text{Vol}(W) &= \int \int \int_W dx dy dz = \int \int \int_W r dr d\alpha dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^H r dr d\alpha dz = \left(\int_0^{2\pi} 1 d\alpha \right) \left(\int_0^R r dr \right) \left(\int_0^H 1 dz \right) = \pi R^2 H\end{aligned}$$

Przykład 8.3.3. Wielokrotnie zastosujmy twierdzenie Fubinię:

$$\int \int \int_{x \in A, y \in B, z \in C} f(x)g(y)h(z) dx dy dz = \left(\int_A f(x) dx \right) \left(\int_B g(y) dy \right) \left(\int_C h(z) dz \right)$$

Przykład 8.3.4. Weźmy punkt $P(x, y, z)$. Θ - kąt z osią OZ.

$$\cos \Theta = \frac{z}{r} \implies z = r \cos \Theta, \sin \Theta = \frac{\text{rzut}}{r} \implies \text{rzut} = r \sin \Theta$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r \sin \Theta}, \sin \alpha = \frac{y}{r \sin \Theta}$$

$$z = r \cos \Theta, x = r \sin \Theta \cos \alpha, y = r \sin \Theta \sin \alpha, \alpha \in (0, 2\pi), \Theta \in (0, \pi)$$

Są to współrzędne sferyczne.

Twierdzenie 8.3.1. (prawdopodobnie) Współrzędne sferyczne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x = r \sin \Theta \cos \alpha$,

$$y = r \sin \Theta \sin \alpha, z = r \cos \Theta$$

$$r \in [0, \infty), \alpha \in [0, 2\pi], \Theta \in [0, \pi]$$

$$\varphi(r, \alpha, \Theta) = (r \sin \Theta \cos \alpha, r \sin \Theta \sin \alpha, r \cos \Theta)$$

$$\mathbf{J}_{\varphi(r, \alpha, \Theta)} = \begin{bmatrix} \sin \Theta \cos \alpha & r \cos \Theta \cos \alpha & -r \sin \Theta \sin \alpha \\ \sin \Theta \sin \alpha & r \cos \Theta \sin \alpha & r \sin \Theta \cos \alpha \\ \cos \Theta & -r \sin \Theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\det(\mathbf{J}_{\varphi(r, \alpha, \Theta)})| = |r^2 \sin^2 \Theta \cos \Theta \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \Theta \cos \Theta \sin^2 \alpha + r^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \alpha \sin^2 \Theta + r^2 \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta \cos^2 \alpha + r^2 \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta \sin^2 \alpha + r^2 \cos^2 \Theta \cos^2 \Theta| = r^2 \sin \Theta$$

$$\int \int \int_K f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_K f(r, \alpha, \Theta) r^2 \sin \Theta dr d\alpha d\Theta$$

9 Wykład IX

9.1 Współrzędne sferyczne

$$z = r \cos(\Theta), \Theta \in [0, \pi]$$

$$y = r \sin(\Theta) \sin(\alpha), \alpha \in [0, 2\pi)$$

$$x = r \sin(\Theta) \cos(\alpha), r \in [0, \infty)$$

$$\varphi(r, \alpha, \Theta) = (r \sin(\Theta) \cos(\alpha), r \sin(\Theta) \sin(\alpha), r \cos(\Theta))$$

Jakobian $J_\alpha = (r, \alpha, \Theta) = r^2 \sin(\Theta)$ Zapisane współrzędne:

$$\begin{aligned}& \frac{d}{dr}(r \sin(\Theta) \cos(\alpha)), \frac{d}{d\alpha}(r \sin(\Theta) \cos(\alpha)), \frac{d}{d\Theta}(r \sin(\Theta) \cos(\alpha)) \\ & \frac{d}{dr}(r \sin(\Theta) \sin(\alpha)), \frac{d}{d\alpha}(r \sin(\Theta) \sin(\alpha)), \frac{d}{d\Theta}(r \sin(\Theta) \sin(\alpha)) \\ & \frac{d}{dr}(r \cos(\alpha)), \frac{d}{d\alpha}(r \cos(\Theta)), \frac{d}{d\Theta}(r \cos(\Theta))\end{aligned}$$

$$\int \int \int_{\varphi(D)} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{D(r, \alpha, \Theta)} f(r \sin \Theta \cos \alpha, r \sin \Theta \sin \alpha, r \cos \Theta) r^2 \sin \Theta dr d\alpha d\Theta$$

Objętość kuli $K_3((0, 0, 0), R)$ o promieniu R .

$$\int \int \int 1 dx dy dz = \quad (1)$$

$$\int \int \int_{r \in [0, R]} r^2 \sin \Theta dr d\alpha d\theta = \quad (2)$$

$$\int \left(\int \left(\int r^2 \sin \Theta dr \right) d\alpha \right) d\Theta = \quad (3)$$

$$\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{R^3}{3} \sin \Theta \right) d\alpha \right) d\Theta = \quad (4)$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{2\pi R^3}{3} \sin \Theta \right) d\Theta = \quad (5)$$

$$\frac{2\pi R^3}{3} (-\cos \Theta) \Big|_0^\pi = \quad (6)$$

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \quad (7)$$

Objętość n -wymiarowej kuli $K_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2\}$
Miara Lebesgue'a $\lambda(K_1) = 2r, \lambda(K_2) = \pi r^2, \lambda(K_3) = \frac{4}{3} \pi r^3$

$$\lambda(K_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

Gdzie $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, \Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \Gamma(a+1) = a!$

9.2 Funkcja Beta

Niech $a, b > 0$:

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(ab)}$$

Policzmy:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \quad (1)$$

Podstawmy $t = s^2, dt = 2s ds$, mamy: (2)

$$= 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \quad (3)$$

Pokażmy, że faktycznie:

$$\lambda(K_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

D-d. Indukcja po n :

$$1. \ n = 1: \lambda(K_1) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} r}{\Gamma(\frac{3}{2})} = 2r \text{ super}$$

2. $n_0 = n$. Popatrzmy na K_{n+1} :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 \leq r^2 \quad (1)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2 - x_{n+1}^2 = \left(\sqrt{r^2 - x_{n+1}^2} \right) \quad (2)$$

Wyznaczmy $\lambda(K_{n+1})$:

$$\lambda(K_{n+1}) = \int_{-r}^r \left(\int \dots \int_{K_{x_1, x_2, \dots, x_n}} dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) dx_{n+1} \quad (1)$$

$$= \int_{-r}^r \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{r^2 - x_{n+1}^2} \right)^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad (2)$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \int_{-r}^r (r^2 - x_{n+1}^2)^{\frac{n}{2}} dx_{n+1} \quad (3)$$

$$\text{Podstawmy } x_{n+1} = rt, dx_{n+1} = rdt, \text{ mamy:} \quad (4)$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} r^{n+1} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\frac{n}{2}} dt \quad (5)$$

$$= \frac{2r^{n+1} \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{n}{2}} dt \quad (6)$$

$$\text{Podstawmy } t^2 = y, dy = 2tdt \quad (7)$$

$$= \frac{2r^{n+1} \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \int_0^1 (1 - y)^{\frac{n}{2}-1+1} y^{-\frac{1}{2}} dy \quad (8)$$

$$= \frac{2r^{n+1} \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} B\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) \quad (9)$$

$$= \frac{2r^{n+1} \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{2})} \quad (10)$$

$$= \frac{r^{n+1} \pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} + 1)} \quad (11)$$

$$= \frac{r^{n+1} \pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} + 1)} \quad \square \quad (12)$$

9.3 Symplesks

$$S_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq a, x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0\}$$

$$\lambda S_n = \frac{a^n}{n!}$$

D-d. indukcyjny:

$$1. \quad n = 1, 0 \leq x_1 \leq a, \lambda(S_1) = a$$

$$2. \quad \lambda(S_n) = \frac{a^n}{n!}$$

$$\lambda(S_{n+1}) = \tag{1}$$

$$= \int \int dx_1 dx_2 \dots dx_{n+1} \tag{2}$$

$$= \int_0^a \frac{(a - x_{n+1})^n}{n!} dx_{n+1} \tag{3}$$

$$= \frac{(-1)(a - x_{n+1})^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_0^a \tag{4}$$

$$= \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \tag{5}$$

Definicja 9.3.1. Splot funkcji. Dla odpowiednich funkcji $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy splot:

$$(f * g)(x) = \int \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x - t)dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Dla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), t = (t_1, t_2, \dots, t_n), x - t = (x_1 - t_1, x_2 - t_2, \dots, x_n - t_n)$

9.4 Wstęp do równań różniczkowych

Przykład równania różniczkowego:

$$m'(t) = (-1)k \cdot m(t)$$

Rozwiązanie - każda funkcja postaci:

$$m(t) = Ce^{-kt}$$

Zobaczmy:

$$m'(t) = C(-k)e^{-kt} = (-k)m(t)$$

9.5 Krzywe całkowe równania różniczkowego

Wykres :cry:

9.6 Równania różniczkowe z warunkiem początkowym

$$\begin{cases} m'(t) = (-k)m(t) \\ m(t_0) = m_0 \end{cases}$$

Rozwiązanie: $m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)}$

10 Wykład X

10.1 Równanie różniczkowe

Definicja 10.1.1. (Równanie różniczkowe) Zwyczajne pierwszego rzędu:

$$y' = f(t, y)$$

Ogólne:

$$F(t, y, y') = 0$$

Definicja 10.1.2. $y(t)$ jest rozwiązaniem rr. $y' = f(t, y)$ na przedziale (a, b) jeśli: $y'(t)$ istnieje na przedziale (a, b) :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Definicja 10.1.3. Wykres rozwiązania rr. to jego krzywa całkowa.

Przykład 10.1.1. Rozwiążmy RR:

1. $y(t) = \frac{1}{1+t}$ jest rozwiązaniem rr. $y' + 2ty^2 = 0$ na $\mathbb{R}$

$$y'(t) = ((1+t^2)^{-1})' = (-1)2t(1+t^2)^{-2} = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \quad (1)$$

$$2ty^2(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2} \quad (2)$$

$$y'(t) + 2ty^2(t) = 0 \quad (3)$$

Jak widać rozwiązanie działa.

2. $y(t) = \ln(t)$ jest rozwiązaniem rr. $y' = e^{-y}$ na $(0, \infty)$.

$$y'(t) = \frac{1}{t} \quad (1)$$

$$e^{-\ln(t)} = \frac{1}{e^{\ln(t)}} = \frac{1}{t} \quad (2)$$

10.2 Równanie różniczkowe z warunkiem

Definicja 10.2.1. Równanie różniczkowe wraz z warunkiem $y(t_0) = y_0$ nazywamy zagadnieniem początkowym. Mówimy, że $y(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego, jeżeli jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y'(t) = f(t, y)$ na pewnym przedziale zawierającym punkt t_0 i spełnia warunek $y(t_0) = y_0$:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definicja 10.2.2. RR, które można zapisać w postaci:

$$y'(t) = g(t)h(y)$$

nazywamy rr. o zmiennych rozdzielonych.

Zakładamy, że funkcje $g(t), h(y)$ są ciągłe oraz $h(y) \neq 0$ dla każdego y . Wówczas całka rr. o rozdzielonych zmiennych dana jest wzorem:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)dt + C$$

$$(y'(t) = \frac{dy}{dt})$$

D-d.

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y) \quad (1)$$

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(t)dt \quad (2)$$

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)dt + C \quad \square \quad (3)$$

Jeżeli $h(y) = 0$ dla pewnego y_0 to funkcja stała $y(t) = y_0$ jest jednym z rozwiązań rr. $y'(t) = g(t)h(y)$. $y' = 0, h(y(t)) = h(y_0) = 0 \quad \square$

Przykład 10.2.1.

$$(1 + e^y)yy' = e^t$$

$$y' = e^t \frac{1}{(1 + e^y)y} \quad (1)$$

$$(1 + e^y)y \frac{dy}{dt} = e^t \quad (2)$$

$$(1 + e^2)ydy = e^t dt \quad (3)$$

$$\int (1 + e^y)ydy = \int e^t dt + C \quad (4)$$

$$\int (y + ye^y)dy = \int e^t dt + C \quad (5)$$

$$\frac{y^2}{2} + \int ye^y dt = e^t + C \quad (6)$$

$$\frac{y^2}{2} + e^y(y - 1) = e^t + C \quad (7)$$

Metodami elementarnymi rozwikłanie tej funkcji jest niemożliwe. Wyjdzie prawdopodobnie specjalna funkcja d'Alemberta. Wobec tego, w tym przypadku nie trzeba tego rozwikływać do funkcji $y(t)$

Twierdzenie 10.2.1. Zakładamy, że funkcje $g(t), h(y)$ są ciągłe odpowiednio na przedziałach $(a, b), (c, d)$ oraz $h(y) \neq 0$ dla każdego $y \in (c, d)$. Niech $t_0 \in (a, b), y_0 \in (c, d)$. Wówczas zagadnienie początkowe:

$$\begin{cases} y' = g(t)h(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ma dokładnie jedno rozwiązanie.

10.3 Równania różniczkowe jednorodne

Definicja 10.3.1. RR, które można zapisać w postaci:

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

nazywamy rr. jednorodnym.

Przykład 10.3.1. $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$

Przykład:

$$tyy' = y^2 - t^2 \quad (1)$$

$$y' = \frac{x}{y} - \frac{1}{\frac{y}{t}} \quad (2)$$

$$f(u) = u - \frac{1}{u} \quad (3)$$

10.4 Równanie różniczkowe o rozdzielonych zmiennych

FAKT. Jeżeli $f(u) = u$, to rr. jednorodne przyjmuje następującą postać:

$$y' = \frac{y}{t}$$

jest to rr. o rozdzielonych zmiennych, którego rozwiązanie dane jest wzorem:

$$y(t) = Ct$$

D-d.

$$y' = \frac{y}{t} \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \quad (2)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t} \quad (3)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t} + C \quad (4)$$

$$\ln(|y|) = \ln(|t|) + C \quad (5)$$

$$|y| = e^{\ln|t|+C} \quad (6)$$

$$|y| = |t|e^C, e^C \in \mathbb{R}^+ \quad (7)$$

$$y = e^C t \vee y = (-e^C)t \quad (8)$$

$$y(t) = C_1 t, C_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (9)$$

10.5 Równanie różniczkowe przez zamianę zmiennych

Twierdzenie 10.5.1. RR. jednorodne przez zamianę zmiennych $y = ut$:

$$y(t) = u(t)t$$

Sprowadzamy do równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych:

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right) \quad (1)$$

$$y = ut \quad (2)$$

$$y' = u't + u(t)' = u't + u \quad (3)$$

$$u't + u = f(u) \quad (4)$$

$$u't = f(u) - u \quad (5)$$

$$\frac{du}{dt}t = f(u) - u \quad (6)$$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dt}{t} \quad (7)$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dt}{t} \quad (8)$$

Przykład 10.5.1.

$$ty' = t + y \quad (1)$$

$$y' = 1 + \frac{y}{t} \quad (2)$$

$$f\left(\frac{y}{t}\right) = 1 + \frac{y}{t} \quad (3)$$

$$\text{podstawmy } y = ut, y' = u't + u \cdot 1 \quad (4)$$

$$ty' = u't + u \quad (5)$$

$$t + y = t + ut \quad (6)$$

$$u't^2 + ut = t + ut \quad (7)$$

$$u't^2 = t \quad (8)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} \quad (9)$$

$$du = \frac{1}{t} dt \quad (10)$$

$$\int du = \int \frac{dt}{t} \quad (11)$$

$$u(t) = \ln|t| + C \quad (12)$$

Kolejno: $x(t) = t(\ln|t| + C)$

Twierdzenie 10.5.2. Zakładamy, że funkcja $g(u)$ jest ciągła na (a, b) oraz dla każdego $u \in (a, b)$, $g(u) \neq u$. Wówczas zagadnienie początkowe:

$$\left\{ y' = g\left(\frac{y}{t}\right) y(t_0) = y_0 \right.$$

$a < \frac{y_0}{t_0} < b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

10.6 Równanie różniczkowe liniowe

Definicja 10.6.1. RR, które można zapisać w postaci:

$$y' + p(t)y = q(t)$$

Nazywamy równaniem liniowym pierwszego rzędu. Jeżeli $q(t) \neq 0$ to równanie różniczkowe jest równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym. Jeżeli $q(t) = 0$: $y' + p(t) = 0$ jest równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym.

Przykład 10.6.1.

$$y' + p(t)y(t) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -p(t)y(t) \quad (2)$$

$$\frac{dy}{y} = -p(t)dt \quad (3)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -p(t)dt \quad (4)$$

$$\ln |y| = \int -p(t)dt + C \quad (5)$$

$$|y| = e^{\int -p(t)dt} e^C \quad (6)$$

$$y = \pm e^C e^{\int -p(t)dt} \quad (7)$$

$$y(t) = c_1 e^{\int -p(t)dt} \quad (8)$$

Przykład 10.6.2. $y' + ty = 0 \implies y(t) = c_1 e^{\int -tdt} = c_1 e^{-\frac{t^2}{2}}$

11 Wykład XI

Definicja 11.0.1. (Całka krzywoliniowa nieskierowana) Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, γ ma ciągłą pochodną. Wtedy:

$$\int_{\gamma} f dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

Przykład 11.0.1. Rozważmy przykłady krzywych gamma:

1. $\gamma(t) = (t, t^2), t \in [0, 1]$
2. Okrąg o środku w punkcie (x_0, y_0) i promieniu r . $\gamma(t) = (x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$
3. Odcinek łączący punkty $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ $\gamma(t) = (1-t) \cdot P + t \cdot Q$ ($tQ = (tx_2, ty_2, tz_2)$)

Przykład 11.0.2. Policzmy następujące Całki:

1. $f = 1, \gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t)), t \in [0, 2\pi], \gamma'(t) = ((r \cos(t))', (r \sin(t))') = (-\sin(t)r, \cos(t)r)$

$$\int_{\gamma} 1 dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t)r)^2 + (\cos(t)r)^2} dt$$

2. $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, t^2), f(x, y) = 3x + \sqrt{y}, \gamma'(t) = (1, 2t), |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$

$$\int_{\gamma} f dl = \int_0^1 (3t + \sqrt{t}) \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

3. $\gamma[0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) = (t, 0) & \text{dla } 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_2(t) = (1, t-1) & \text{dla } 1 < t < 2 \\ \gamma_3(t) = (3-t, 1) & \text{dla } 2 \leq t < 3 \\ \gamma_4(t) = (0, 4-t) & \text{dla } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

$$\int_{\gamma} dl = \int_{\gamma_1} x^2 dl + \int_{\gamma_2} x^2 dl + \int_{\gamma_3} x^2 dl + \int_{\gamma_4} x^2 dl$$

$$\gamma'_1(t) = (1, 0), |\gamma'_1(t)| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \gamma'_2(t) = (0, 1), |\gamma'_2(t)| = 1, \gamma'_3(t) = (-1, 0), |\gamma'_3(t)| = 1, \dots$$

Definicja 11.0.2. (Pole wektorowe) $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$F(x, y) = (x, y)$$

$$G(x, y) = (-y, x)$$

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$$

$$F_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Definicja 11.0.3. (Całka krzywoliniowa skierowana)

$$\int_{\gamma} \vec{F} \circ \vec{dl} = \int_{\gamma} (F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_n dx_n) = \int_a^b \left(\vec{F}(\gamma(t)) \circ \gamma'(t) \right) dt$$

gdzie $\circ$ to iloczyn skalarny.

Przykład 11.0.3. Przykład: $\vec{F}(x, y) = (x, y), \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi], \gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \circ \vec{dl} &= \int_0^{2\pi} (\cos(t), \sin(t)) \circ (-\sin(t), \cos(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(t)\sin(t)) + \sin(t)\cos(t) dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0 \end{aligned}$$

Dla $\vec{G}$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{G} \circ \vec{dl} &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \circ (-\sin(t), \cos(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \end{aligned}$$

Obszar jednospójny nie ma dziury w środku - Prowadzący.

Twierdzenie 11.0.1. (Twierdzenie Greena) Jeśli B jest obszarem jednospójnym, ograniczonym krzywą gładką $\vec{F} = (F_1, F_2)$ - pole wektorowe, które ma ciągłą pochodną na pewnym otoczeniu B . ∂B - brzeg zorientowany dodatnio:

$$\int_{\partial B} \vec{F} \circ \vec{dl} = \int \int_B \left(-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) dx dy$$

Przykład 11.0.4. Zastosujmy Tw. Greena. $F(x, y) = ((1 - x^2)y, x(1 + y^2))$, $(F_1(x, y), F_2(x, y))$, B - koło $x^2 + y^2 \leq R^2$ zorientowane dodatnio:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \vec{F} \circ d\vec{l} &= \int \int_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) dx dy = \\ &= \int \int_{x^2+y^2 \leq R^2} (-(1 - x^2) + (1 + y^2)) dx dy = \int \int_{x^2+y^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\alpha = \frac{\pi}{2} R^4 \end{aligned}$$

Definicja 11.0.4. (Całka powierzchniowa skierowana) σ - mały element powierzchni

$$\int_{\partial B} \vec{F} \circ d\vec{\sigma} =_{def} \text{całka podwójna}$$

Twierdzenie 11.0.2. (Twierdzenie Gaussa) (zamiana całki powierzchniowej skierowanej na całkę potrójną)

$$\int_{\partial B} \vec{F} \circ d\vec{\sigma} = \int \int \int_B (\nabla \circ \vec{F}) dx dy dz$$

Przykład 11.0.5. $B : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $OB : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \vec{F} \circ d\vec{\sigma} &= \int \int \int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{\partial}{\partial x}(x) \frac{\partial}{\partial y}(y) \frac{\partial}{\partial z}(x) dx dy dz = \int \int \int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} 3 dx dy dz = \\ &= 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3 \end{aligned}$$