

Matematyka Dyskretna

Rafał Włodarczyk

INA 2 Sem. 2023

1 Wykład I

1.1 Współczynniki Dwumianowe

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$n \in \mathbb{N}^+: [n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Definicja 1.1.1. Silnia. Niech $n \in \mathbb{N}$. Definiujemy:

$$0! = 1$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Definicja 1.1.2. Silnia górna. Niech $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Definiujemy:

$$x^0 = 1$$

$$x^n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1), n \geq 1.$$

Definicja 1.1.3. Silnia dolna. Analogicznie

Definicja 1.1.4. Współczynnik dwumianowy (symbol Newtona). Niech $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. Definiujemy:

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}$$

Uwaga. Czasami wygodnie będzie rozszerzyć definicję $\binom{x}{k}$ na $k \in \mathbb{Z}$ wtedy dla $k < 0$ przyjmujemy $\binom{x}{k} = 0$

Interpretacja kombinatoryczna: $k, n \in \mathbb{N}, n \geq k$:

$$\binom{n}{k} - \# \text{ podzbiorów } k\text{-elementowych zbioru } n\text{-elementowego}$$

Przykład 1.1.1. Rozważ następujące ćwiczenia:

Ćwiczenie 1. Pokaż, że podzbiorów k -elementowych zbioru n -elementowego jest $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ćwiczenie 2. Niech $k, n \in \mathbb{N}, n \geq k$. Wtedy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Ćwiczenie 3. Reguła Pochłaniania. Niech $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^+, n \geq k$. Wtedy: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$

Twierdzenie 1.1.1. Dwumian Newtona. Niech $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

D-d. (indukcyjny) - ćwiczenie

D-d. (kombinatoryczny)

Dokonujemy mnożenia:

$$(x+y)(x+y)\dots(x+y) = x^n + x^{n-1} \cdot y + \dots + x \cdot y^{n-1} + y^n$$

Wystarczy zauważyć, że współczynnik przy $x^k \cdot y^{n-k}$ to liczba sposobów, na jakie spośród n czynników $(x+y)$ możemy wybrać k nawiasów jako te, z których wybieramy składniki x .

Wniosek 1:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ - liczba wszystkich podzbiorów zbioru n - elementowego

Wniosek 2:

$$0 = 0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$$
$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$$

Zatem widzimy że:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} : (2 \text{ nie dzieli } k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} : (2 \text{ dzieli } k)$$

podzbiorów o mocy parzystej zbioru n -elementowego = # podzbiorów o mocy nieparzystej zbioru n -elementowego

Twierdzenie 1.1.2. Tożsamość Pascala. Niech $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^+, n > k$. Wtedy:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

D-d. (analityczny). Niech $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k &= \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} = \\ &= (x+1)^n = (x+1)^{n-1} \cdot (x+1) = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \right) (x+1) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k = \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k + \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k} x^k \end{aligned}$$

Zatem:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k$$

Współczynniki przy odpowiadających sobie są równe, zatem dla $k \in \mathbb{N}^+, k < n$ mamy:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

D-d. (kombinatoryczny). Zliczmy na dwa sposoby # podzbiorów k -elementowych zbioru n -elementowego.

1. $\binom{n}{k}$ - z definicji
2. Wyróżniamy jeden element $*$ w zbiorze n -elementowym. Podzbiory k -elementowe dzielą się teraz na dwie klasy:
Te, które nie zawierają $*$. Jest ich $\binom{n-1}{k}$ (gwiazdki nie ma)
Te, które zawierają $*$. Jest ich $\binom{n-1}{k-1}$ (gwiazdkę wybieram)
Zatem zachodzi twierdzenie.