

Metody Probabilistyczne i Statystyka

Rafał Włodarczyk

INA 3, 2024

Contents

1	Lista 6	2
1.1	1L6	2
1.2	2L6	3
1.3	3L6	3
1.4	4L6	4
1.5	5L6	4
1.6	6L6	7

1 Lista 6

1.1 1L6

Rzucamy niezależnie dwoma sześciennymi kostkami. X - mniejszy z rzutów. Y - większy z rzutów. Wyznamy rozkład łączny oraz rozkłady brzegowe zmiennych X i Y .

Zliczamy wszystkie przypadki dla których $\min$ wyniósł X , a $\max$ Y . Wprowadźmy dwie zmienne losowe $R_1 : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}$ oraz $R_2 : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, 6\}$, gdzie R_1 odpowiada za pierwszy rzut, a R_2 za drugi rzut. Dokonajmy zliczenia poszczególnych wartości $\min, \max$:

R_1/R_2	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

Table 1: Tabela $\min R_1, R_2$

R_1/R_2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Table 2: Tabela $\max R_1, R_2$

Dzieląc liczbę przypadków przez liczbę możliwych wyników otrzymujemy rozkłady brzegowe $P_X(x)$ oraz $P_Y(y)$:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

Y	1	2	3	4	5	6
$P(Y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Table 3: Rozkłady brzegowe zmiennej X i Y

Wyznamy następnie rozkład łączny, czyli funkcję $P_{X,Y}(x, y)$, która określa prawdopodobieństwo, że zmienna X przyjmie wartość x oraz zmienna Y przyjmie wartość y .

X/Y	1	2	3	4	5	6
1	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36
2	0	1/36	2/36	2/36	2/36	2/36
3	0	0	1/36	2/36	2/36	2/36
4	0	0	0	1/36	2/36	2/36
5	0	0	0	0	1/36	2/36
6	0	0	0	0	0	1/36

Table 4: Rozkład łączny zmiennych X i Y

Odpowiedzmy na pytanie, czy zmienne losowe X i Y są niezależne. Wiemy, że zmienne losowe są niezależne gdy spełniony jest warunek:

$$(\forall A, B \in \mathcal{B}) P(X \in A \wedge Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

gdzie $\mathcal{B}$ to zbiór borelowski. W naszym przypadku zbiór borelowski to $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zobaczmy, że przykładowo dla wartości $A = \{1\}, B = \{1\}$. $P(X \in A \wedge Y \in B) = 1/36$, $P(X \in A)P(Y \in B) = 11/36 \cdot 1/36 = 11/216$, wobec tego zmienne losowe X i Y są zależne.

Obliczmy wartość oczekiwaną zmiennej X oraz Y :

$$E(X) = \sum_{x=1}^6 xP(X=x) = \quad (1)$$

$$= 1 \cdot 11/36 + 2 \cdot 9/36 + 3 \cdot 7/36 + 4 \cdot 5/36 + 5 \cdot 3/36 + 6 \cdot 1/36 = 91/36 \quad (2)$$

$$E(Y) = \sum_{y=1}^6 yP(Y=y) = \quad (3)$$

$$= 1 \cdot 1/36 + 2 \cdot 3/36 + 3 \cdot 5/36 + 4 \cdot 7/36 + 5 \cdot 9/36 + 6 \cdot 11/36 = 161/36 \quad (4)$$

1.2 2L6

Niech $F(s, t)$ będzie łączną dystrybuantą wektora losowego (X, Y) . Pokażmy, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Możemy od $P(X \leq b, Y \leq d)$ odjąć przedziały brzegowe $P(X \leq a, Y \leq d)$, $P(X \leq b, Y \leq c)$, ale zgodnie z zasadą włączeń i wyłączeń musimy dodać z powrotem $P(X \leq a, Y \leq c)$, ponieważ dwukrotnie policzyliśmy przedział $P(X \leq a, Y \leq c)$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) =_{\text{inclusion-exclusion principle}} \quad (1)$$

$$= P(X \leq b, Y \leq d) - P(X \leq a, Y \leq d) - P(X \leq b, Y \leq c) + P(X \leq a, Y \leq c) = \quad (2)$$

$$= F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \quad (3)$$

1.3 3L6

Wyznaczmy wartość oczekiwaną zmiennych losowych z zadań 1L5 oraz 3L5.

W zadaniu 1L5 rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej R ($r \in \{0, 1, 2\}$) wyniósł:

$$P(R=r) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{dla } r=0 \\ \frac{7}{16} & \text{dla } r=1 \\ \frac{5}{16} & \text{dla } r=2 \end{cases}$$

Zatem wartość oczekiwana wynosi:

$$\mathbf{E}(R) = \sum_{r=0}^2 r \cdot P(R=r) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{5}{16} = \frac{17}{16} \quad (1)$$

W zadaniu 3L5 rozkład prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej X wyniósł:

$$P(X=x) = f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

Wyznaczymy wartość oczekiwaną zmiennej losowej X :

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{x} dx = \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot [1^{\frac{3}{2}} - 0] = \frac{1}{3} \quad (3)$$

1.4 4L6

Niech $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ będzie zmienną losową. Wyznacz $\mathbf{E}(X)$ dla dwóch przypadków:

$$1. P(X = k) = \frac{1}{2^k}$$

$$2. P(X = k) = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2}$$

Rozważmy przypadek pierwszy. Wartość oczekiwana dla zmiennej losowej X wynosi:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k \geq 1} k \cdot P(X = k) = \sum_{k \geq 1} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (1)$$

Spójrzmy na funkcję tworzącą dla podanej sumy:

$$\sum_{k \geq 1} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k \geq 1} x^k \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) \quad (3)$$

$$\sum_{k \geq 1} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (4)$$

$$\sum_{k \geq 1} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (5)$$

Podstawmy $x = 1/2$:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k \geq 1} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/2}{(1 - \frac{1}{2})^2} = 2 \quad (6)$$

Rozważmy przypadek drugi. Wartość oczekiwana dla zmiennej losowej X wynosi:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k \geq 1} k \cdot P(X = k) = \sum_{k \geq 1} k \cdot \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{k^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \quad (7)$$

Szereg $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ jest rozbieżny, zatem wartość oczekiwana dla zmiennej losowej X nie istnieje.

1.5 5L6

Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie F . Niech $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ oraz $Z = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Wyznaczymy dystrybuantę zmiennych losowych Y oraz Z .

Dystrybuanty w przypadku ogólnym

Dla zmiennej losowej Y dystrybuanta wynosi:

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq t) = \quad (1)$$

$$= P(X_1 \leq t \vee \dots \vee X_n \leq t) = \quad (2)$$

$$= 1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} > t) = \quad (3)$$

$$= 1 - P(X_1 > t \wedge \dots \wedge X_n > t) = \quad (4)$$

$$= 1 - P(X_1 > t)P(X_2 > t) \cdots P(X_n > t) = \quad (5)$$

$$= 1 - (1 - P(X_1 \leq t))^n \quad (6)$$

$$= 1 - (1 - F(t))^n \quad (7)$$

Dla zmiennej losowej Z dystrybuanta wynosi:

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq t) = \quad (8)$$

$$= P(X_1 \leq t \wedge X_2 \leq t \wedge \dots \wedge X_n \leq t) = \quad (9)$$

$$= P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t) \cdots P(X_n \leq t) = \quad (10)$$

$$= F(t)^n \quad (11)$$

Dla X_i z ustalonym PMF

Założmy, że X_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ to dyskretne zmienne losowe z PMF:

$$P(X_i = k) = \frac{1}{N}, k \in \{1, \dots, N\}$$

Wyznaczymy funkcję masy Y , możemy ją zapisać jako różnicę dystrybuant:

$$P(Y = k) = F_Y(k) - F_Y(k-1) \quad (12)$$

$$P(Y = k) = \left[1 - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n\right] - \left[1 - \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n\right] \quad (13)$$

$$P(Y = k) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (14)$$

Podobnie z funkcją masy Z :

$$P(Z = k) = F_Z(k) - F_Z(k-1) \quad (15)$$

$$P(Z = k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (16)$$

Wyznaczymy następnie $\mathbf{E}(Y)$. Wartość oczekiwana zmiennej losowej Y jest dana wzorem:

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^N k \cdot P(Y = k) \quad (17)$$

$$= \sum_{k=1}^N k \left[\left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \right] \quad (18)$$

$$= \mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)^n \quad (19)$$

Podobnie wyznaczmy $\mathbf{E}(Z)$. Wartość oczekiwana zmiennej losowej Z jest dana wzorem:

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{k=1}^N k \cdot P(Z = k) \quad (20)$$

$$= \sum_{k=1}^N k \left[\left(\frac{k}{N} \right)^n - \left(\frac{k-1}{N} \right)^n \right] \quad (21)$$

$$= \mathbf{E}(Z) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N} \right)^n \quad (22)$$

Dla X_i z rozkładem jednostajnym

Założmy teraz, że X_i ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$. Wówczas dystrybuanta $F(t)$ i gęstość $f(t)$ są dane wzorami:

$$F_X(t) = P(X_i \leq t) = t, \quad t \in [0, 1],$$

$$f_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t) = 1, \quad t \in [0, 1].$$

Z wcześniejszych ustaleń:

$$F_Y(t) = 1 - (1 - F(t))^n = 1 - (1 - t)^n, \quad t \in [0, 1] \quad (23)$$

$$f_Y(t) = \frac{d}{dt} F_Y(t) = \frac{d}{dt} [1 - (1 - t)^n] = n(1 - t)^{n-1}, \quad t \in [0, 1] \quad (24)$$

Podobnie zapisujemy:

$$F_Z(t) = F_X(t)^n = t^n, \quad t \in [0, 1] \quad (25)$$

$$f_Z(t) = \frac{d}{dt} F_Z(t) = \frac{d}{dt} [t^n] = nt^{n-1}, \quad t \in [0, 1] \quad (26)$$

Wartość oczekiwana Y jest dana wzorem:

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^1 t \cdot f_Y(t) dt = \int_0^1 t \cdot n(1 - t)^{n-1} dt \quad (27)$$

$$\mathbf{E}(Y) = n \int_0^1 t(1 - t)^{n-1} dt \quad (28)$$

$$\mathbf{E}(Y) = n \left[-\frac{t(1 - t)^n}{n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1 - t)^n}{n} dt \quad (29)$$

$$\mathbf{E}(Y) = n \cdot \frac{1}{n} \int_0^1 (1 - t)^n dt = \int_0^1 (1 - t)^n dt \quad (30)$$

$$\mathbf{E}(Y) = \left[-\frac{(1 - t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \quad (31)$$

$$(32)$$

Wartość oczekiwana Z jest dana wzorem:

$$\mathbf{E}(Z) = \int_0^1 t \cdot f_Z(t) dt = \int_0^1 t \cdot n t^{n-1} dt \quad (33)$$

$$\mathbf{E}(Z) = n \int_0^1 t^n dt = n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{n}{n+1} \quad (34)$$

1.6 6L6

Niech $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$. Pokażmy, że $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$, o ile podany szereg jest zbieżny.

Rozpiszmy z definicji. Możemy zamienić $k \cdot P(X = k)$ na sumę $\sum_{l=1}^k P(X = k)$, zatem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k P(X = k) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} P(X = k) = \quad (1)$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} P(X \geq l) = \sum_{l=0}^{\infty} P(X > l) \quad (2)$$