

Metody Probabilistyczne i Statystyka

Rafał Włodarczyk

INA 3, 2024

Contents

1	Lista 7	2
1.1	1L7	2
1.2	2L7	2
1.3	3L7	2
1.4	4L7	4
1.5	5L7	4
1.6	6L7	5
1.7	7L7	6
1.8	8L7	6

1 Lista 7

1.1 1L7

Weźmy $X, Y : \Omega \rightarrow \{(0, 1), (1, 0), (-1, 0), (0, -1)\}$ z równym prawdopodobieństwem. Wtedy PMF:

$$p_X(x) = p_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{dla } x = -1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Zatem $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 0$, oraz widzimy że $\mathbf{E}(XY) = 0$. Jednak zmienne nie są niezależne:

$$p_X(1)p_Y(1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \neq p_{XY}(1, 1) = 0$$

1.2 2L7

Pokażmy, że $\mathbf{var}(aX + b) = a^2 \mathbf{var}(X)$. Zapiszmy:

$$\mathbf{var}(aX + b) = \mathbf{E}((aX + b)^2) - \mathbf{E}(aX + b)^2 \quad (1)$$

$$= \mathbf{E}(a^2 X^2 + 2abX + b^2) - (\mathbf{E}(aX) + \mathbf{E}(b))^2 \quad (2)$$

$$= \mathbf{E}(a^2 X^2) + \mathbf{E}(2abX) + \mathbf{E}(b^2) - (a\mathbf{E}(X) + b)^2 \quad (3)$$

$$= a^2 \mathbf{E}(X^2) + 2ab\mathbf{E}(X) + b^2 - a^2 \mathbf{E}(X)^2 - 2ab\mathbf{E}(X) - b^2 \quad (4)$$

$$= a^2 \mathbf{E}(X^2) - a^2 \mathbf{E}(X)^2 \quad (5)$$

$$= a^2 (\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2) \quad (6)$$

$$= a^2 \mathbf{var}(X) \quad (7)$$

1.3 3L7

Wyznaczenie $\mathbf{var}(X)$ oraz $\mathbf{var}(Y)$ dla rozkładu 1L6

Z zadania 1L6 wiemy, że:

$$E(X) = \frac{91}{36} \quad (1)$$

$$E(Y) = \frac{161}{36} \quad (2)$$

$$(3)$$

Policzmy $\mathbf{E}(X^2)$ oraz $\mathbf{E}(Y^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{x \in \text{rng}(X)} x^2 P(X = x) = \quad (4)$$

$$= \frac{1}{36} \cdot (1^2 \cdot 11 + 2^2 \cdot 9 + 3^2 \cdot 7 + 4^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 3 + 6^2 \cdot 1) = \frac{301}{36} \quad (5)$$

$$(6)$$

$$E(Y^2) = \sum_{y \in \text{rng}(Y)} y^2 P(Y = y) = \quad (7)$$

$$= \frac{1}{36} \cdot (6^2 \cdot 11 + 5^2 \cdot 9 + 4^2 \cdot 7 + 3^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 3 + 1^2 \cdot 1) = \frac{791}{36} \quad (8)$$

Policzmy $\text{var}(X)$ oraz $\text{var}(Y)$:

$$\text{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296} \quad (9)$$

$$\text{var}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296} \quad (10)$$

Wyznaczenie $\text{var}(X)$ dla $X \sim Geo(p)$

Pomocna suma:

$$\sum_{k \geq 1} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (11)$$

$$\sum_{k \geq 1} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (12)$$

Wyznaczymy $\mathbf{E}(X)$:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k \geq 1} k \cdot P(X = k) = \sum_{k \geq 1} k \cdot p(1-p)^{k-1} = \quad (13)$$

$$= p \sum_{k \geq 1} k(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} \quad (14)$$

Wyznaczymy $\mathbf{E}(X^2)$:

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k \geq 1} k^2 \cdot P(X = k) = \sum_{k \geq 1} k^2 \cdot p(1-p)^{k-1} = \quad (15)$$

$$= p \sum_{k \geq 1} k^2(1-p)^{k-1} = p \cdot \frac{2-p}{(1-(1-p))^3} = \frac{2-p}{p^2} \quad (16)$$

Wyznaczymy $\text{var}(X)$:

$$\text{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \quad (17)$$

Wyznaczenie $\text{var}(X)$ dla $X \sim Po(\lambda)$

Wyznaczymy $\mathbf{E}(X)$:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k \geq 0} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda \quad (18)$$

Wyznaczmy $\mathbf{E}(X^2)$:

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} \quad (19)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k+1}}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad (20)$$

$$= \lambda \cdot \mathbf{E}(X) + \lambda \cdot 1 \quad \mathbf{E}(X) = \lambda \text{ and } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = 1 \quad (21)$$

$$= \lambda \cdot \lambda + \lambda \quad \mathbf{E}(X) = \lambda \quad (22)$$

$$= \lambda^2 + \lambda. \quad (23)$$

Wyznaczmy $\mathbf{var}(X)$:

$$\mathbf{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \quad (24)$$

1.4 4L7

Z zadania 8L3 wiemy, że optymalna wartość prawdopodobieństwa wyniosła $p = \frac{1}{n}$. Prawdopodobieństwo, że w pojedynczej próbie zajdzie wymiana wynosi:

$$s = n \cdot p(1-p)^{n-1} = n \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \quad (1)$$

Oczekujemy sukcesu po k próbach, to znaczy dla $k-1$ poprzednich ramek czasowych nie mogła zajść wymiana:

$$P(X = k) = s \cdot (1-s)^{k-1} \quad (2)$$

Widzimy, że $X \sim Geo\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\right)$, zatem korzystając z 3L7 możemy napisać:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \quad (3)$$

$$\mathbf{var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{n^{2n-2} - (n^2 - n)^{n-1}}{(n-1)^{2n-2}} \quad (4)$$

1.5 5L7

Niech $X \sim Po(\lambda)$ będzie zmienną losową opisującą źródło pakietów. Wiemy, że funkcja masy prawdopodobieństwa dla rozkładu Poissona jest dana wzorem:

$$P(X = N) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^N}{N!}$$

Niech Y będzie zmienną losową opisującą ile pakietów dotarło do celu. Wtedy:

$$P(Y = n) = \begin{cases} P(X = n) \cdot p^n(1-p)^0 \binom{n}{0} & \text{Wszystkie pakiety dotarły} \\ P(X = n+1) \cdot p^n(1-p)^1 \binom{n+1}{1} & \text{Dokładnie jeden pakiet nie dotarł} \\ P(X = n+2) \cdot p^n(1-p)^2 \binom{n+2}{2} & \text{Dokładnie dwa pakiety nie dotarły} \\ \vdots & \end{cases} \quad (1)$$

Zatem funkcja masy prawdopodobieństwa dla Y będzie dana wzoremn:

$$P(Y = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = n+k) \cdot p^n(1-p)^k \binom{n+k}{k} = \quad (2)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n+k}}{(n+k)!} \cdot p^n(1-p)^k \binom{n+k}{k} = \quad (3)$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^n p^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(n+k)!} (1-p)^k \frac{(n+k)!}{k!n!} = \quad (4)$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \lambda^n p^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot (1-p))^k}{k!} = \quad (5)$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \lambda^n p^n}{n!} e^{\lambda(1-p)} = \quad (\text{Szereg Maclaurina}) \quad (6)$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda-p\lambda} \lambda^n p^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^n}{n!} \quad (7)$$

Wobec tego $Y \sim Po(\lambda p)$.

1.6 6L7

Niech $X \sim Geo(p)$ oraz $Y \sim Geo(r)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym. Wyznamy rozkład zmiennej losowej $Z = \min X, Y$.

Funkcja masy $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Rozpiszmy prawdopodobieństwo dla Z :

$$P(Z = k) = P(\min\{X, Y\} = k) = \quad (1)$$

$$= P(X = k)P(Y > k) + P(X = k)P(Y = k) + P(X > k)P(Y = k) = \dots \quad (2)$$

Szansa, że zajdzie $P(X > k)$ (więcej niż k prób do pierwszego sukcesu) wynosi $P(X > k) = (p-1)^k$, wobec tego:

$$\dots = p(1-p)^{k-1} \cdot (1-r)^k + p(1-p)^{k-1} \cdot r(1-r)^{k-1} + (1-p)^k \cdot r(1-r)^{k-1} \quad (3)$$

$$= (1-p)^{k-1} [p(1-r)^k + pr(1-r)^{k-1} + (1-p)r(1-r)^{k-1}] \quad (4)$$

$$= [(1-p)(1-r)]^{k-1} [p(1-r) + pr + (1-p)r] \quad (5)$$

$$= [(1-p)(1-r)]^{k-1} [p + r - pr] \quad (6)$$

$$= (1 - ((1-p)(1-r)))^{k-1} [p + r - pr] \sim Geo(p + r - pr) \quad (7)$$

1.7 7L7

Weźmy $X \sim \text{Geo}(p)$. Pokażmy, że zachodzi następująca zależność:

$$P(X = n + m | X > m) = P(X = n) \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Wiemy, że $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$, zatem zapiszmy:

$$P(X = n + m | X > m) = \frac{P(X = n + m \wedge X > m)}{P(X > m)} = \dots \quad (1)$$

Z $X = n + m$ jednoznacznie wynika z $X > m$, zatem:

$$\dots = \frac{P(X = n + m)}{P(X > m)} = \frac{p(1 - p)^{n+m-1}}{(1 - p)^m} = p(1 - p)^{n-1} = P(X = n) \quad (2)$$

Wymyślmy rozsądną interpretację powyższego faktu.

- Niezależnie od ilości porażek, które uzyskaliśmy wcześniej, rozkład prawdopodobieństwa X nie zmienia się - nie przybliży nas do sukcesu.

1.8 8L7

Założmy, że $\mathbf{E}(R) = 100$ oraz $\mathbf{var}(R) = 100$. Zastosujmy nierówność Markowa oraz Czebyszewa do oszacowania z góry $P(R \geq 200)$.

Nierówność Markowa:

$$P(R \geq 200) \leq \frac{\mathbf{E}(R)}{200} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Nierówność Czebyszewa:

$$P(R \geq 200) = P(R - 100 \geq 100) = P(|R - 100| \geq 100) = \quad (2)$$

$$= P(|R - \mathbf{E}(R)| \geq 100) \leq \frac{\mathbf{var}(R)}{100^2} = \frac{100}{100^2} = \frac{1}{100} \quad (3)$$