

Metody Probabilistyczne i Statystyka

Rafał Włodarczyk

INA 3, 2024

Contents

1	Lista 8	2
1.1	1L8	2
1.2	2L8	2
1.3	3L8	3
1.4	4L8	4
1.5	5L8	4

1 Lista 8

1.1 1L8

Wyznaczmy wariancję zmiennej losowej Y z zadania 5L6, ostatniego podpunktu. Mamy:

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n+1}$$

Policzmy:

todo: powtórz całkę

$$\mathbf{E}(Y^2) = \int_0^1 t^2 f_Y(t) dt = \int_0^1 t^2 n(1-t)^{n-1} dt = \quad (1)$$

$$= n \int_0^1 t^2 (1-t)^{n-1} dt = n \cdot \left[\frac{-t^2(1-t)^n}{n} + \int \frac{2t(1-t)^n}{n} dt \right]_0^1 = \quad (2)$$

$$= \left[-t^2(1-t)^n + 2 \left(-\frac{(1-t)^{n+2}}{n+2} + \frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right) \right]_0^1 = \quad (3)$$

$$= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \quad (4)$$

Zatem:

$$\mathbf{var}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(Y))^2 = \frac{2}{(n+2)(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \quad (5)$$

$$= \frac{2(n+1) - (n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{2n+2-n-2}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} \quad (6)$$

todo: policz $E(Z^2)$

Wyznaczmy wariancję zmiennej losowej Z . Mamy:

$$\mathbf{var}(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{2}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = \quad (7)$$

$$= \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n^3 + 2n^2 + n - n^3 - 2n^2}{(n+2)(n+1)^2} = \quad (8)$$

$$= \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} \quad (9)$$

1.2 2L8

Weźmy X - zmienna losowa o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, \pi]$, którego gęstość:

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{dla } t \in (0, \pi) \\ 0 & \text{dla } t \notin (0, \pi) \end{cases}$$

Wyznaczmy wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych losowych $Y = \sin X$ oraz $Z = \cos X$. Wiemy, że jeśli pewna funkcja $g(x)$ jest ciągła oraz dane jest f_X to zachodzi:

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Policzmy:

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(\sin(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(X) f_X(x) dx = \int_0^{\pi} \sin(X) \cdot \frac{1}{\pi} dx = \quad (1)$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin(X) dx = \frac{1}{\pi} [-\cos(x)]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} (-\cos(x) + \cos(0)) = \frac{2}{\pi} \quad (2)$$

Następnie policzmy

$$\mathbf{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(x) \frac{1}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 - \cos(2x) dx = \frac{1}{2\pi} [x - \sin(2x)]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2} \quad (4)$$

Finalnie

$$\mathbf{var}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(Y))^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \quad (5)$$

Wyznamy teraz wartość oczekiwaną i wariancję dla Z :

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(\cos(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) f_X(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) dx = 0 \quad (6)$$

Następnie:

$$\mathbf{E}(Z^2) = \mathbf{E}(\cos(X)^2) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(x) f_X(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \quad (7)$$

Zatem:

$$\mathbf{var}(Z) = \mathbf{E}(Z^2) - (\mathbf{E}(Z))^2 = \frac{1}{2} \quad (8)$$

1.3 3L8

Funkcja masy prawdopodobieństwa dla rozkładu normalnego $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ będzie wynosić

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1)$$

Liczmy:

$$\mathbf{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \dots \quad (2)$$

Całkujemy przez części

$$u = x^{k-1} \quad du = (k-1)x^{k-2} dx \quad (3)$$

$$dv = x e^{-\frac{x^2}{2}} \quad v = -e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (4)$$

zachodzi

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-x^{k-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + (k-1) \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \quad (5)$$

$$= (k-1) \mathbf{E}(X^{k-2}) \quad (6)$$

Zobaczmy, że skoro $\mathbf{E}(X) = 0$ oraz $\mathbf{E}^2(X) = 1$, to dla $k \in \{1, 2, \dots\}$ zachodzi:

$$\mathbf{E}(X^{2k+1}) = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{E}(X^{2k}) = (2k-1)(2k-3)\dots(3) \cdot \mathbf{E}(X^2) = \quad (8)$$

$$= \frac{2k(2k-1)(2k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2k(2k-2) \cdot \dots 4 \cdot 2} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \quad (9)$$

1.4 4L8

Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależne o rozkładach $Exp(\lambda_i)$, wyznaczmy rozkład zmiennej losowej $Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

$$f_{X_i}(t) = P(X = t) = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Spróbujmy

$$1 - F_Y(t) = P(Y \geq t) = \prod_{i=1}^k e^{-\lambda_i t} = e^{-t \cdot [\sum_{k=1}^k \lambda_i]} \quad (1)$$

$$F_Y(t) = 1 - e^{-t \cdot [\sum_{k=1}^k \lambda_i]} \quad (2)$$

$$(3)$$

Widzimy, że $Y \sim Exp(\sum_{k=1}^k \lambda_i)$.

1.5 5L8

Wiedząc, że zmienna losowa X jest dana dystrybuantą:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t}) & t \in [0, 1] \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

Wyznaczmy gęstość prawdopodobieństwa:

$$f_X(t) = \frac{d}{dx} F_X(t) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x}) \right) = \quad (4)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right] = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \quad (5)$$

Wyznaczmy wartość oczekiwaną:

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\pi \sqrt{x(x-1)}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} dx = \dots \quad (6)$$

Dokonajmy podstawienia

$$x = \sin^2(\Theta) \quad (7)$$

$$dx = 2 \sin(\Theta) \cos(\Theta) d\Theta = \sin(2\Theta) d\Theta \quad (8)$$

$$0 \rightarrow \Theta = 0 \quad (9)$$

$$1 \rightarrow \Theta = \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

Mamy

$$\dots = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^2(\Theta)}{\cos^2(\Theta)}} \sin(2\Theta) d\Theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\Theta)}{\cos(\Theta)} \cdot 2 \sin(\Theta) \cos(\Theta) d\Theta = \quad (11)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\Theta) d\Theta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \quad (12)$$