

Ćwiczenia z JFTT

Rafał Włodarczyk

2025-10-16

1 Lista 1

1.5 Zadanie 5

Udowodnić następujące tożsamości dla wyrażeń regularnych r , s i t , przy czym $r = s$ oznacza identyczność języków opisywanych przez r i s .

1.5.1 $(r + s) + t = r + (s + t)$

$$x \in (r + s) + t \equiv (1)$$

$$\equiv x \in (r + s) \vee x \in t \equiv (2)$$

$$\equiv x \in r \vee x \in s \vee x \in t \equiv (3)$$

$$\equiv x \in r \vee x \in (s + t) \equiv (4)$$

$$\equiv x \in r + (s + t) \quad \square (5)$$

1.5.2 $(rs)t = r(st)$

$$x \in (rs)t \equiv (1)$$

$$\equiv (\exists a, b) (x = ab \wedge a \in rs \wedge b \in t) \equiv (2)$$

$$\equiv (\exists b, c, d) (x = cdb \wedge c \in r \wedge d \in s \wedge b \in t) \equiv (3)$$

$$\equiv (\exists c, e) (x = ce \wedge c \in r \wedge e \in st) \equiv (4)$$

$$\equiv x \in r(st) \quad \square (5)$$

1.5.3 $r(s + t) = rs + rt$

$$x \in r(s + t) \equiv (1)$$

$$\equiv (\exists y, z) (x = yz \wedge y \in r \wedge z \in (s + t)) \equiv (2)$$

$$\equiv (\exists y, z) (x = yz \wedge y \in r \wedge (z \in s \vee z \in t)) \equiv (3)$$

$$\equiv (\exists y, z) (x = yz \wedge ((y \in r \wedge z \in s) \vee (y \in r \wedge z \in t))) \equiv (4)$$

$$\equiv rs + rt \quad \square (5)$$

1.5.4 $(r + s)t = rt + st$

$$x \in (r + s)t \equiv \quad (1)$$

$$\equiv (\exists y, z) (x = yz \wedge y \in (r + s) \wedge z \in t) \equiv \quad (2)$$

$$\equiv (\exists y, z) (x = yz \wedge (y \in r \vee y \in s) \wedge z \in t) \equiv \quad (3)$$

$$\equiv (\exists y, z) (x = yz \wedge ((y \in r \wedge z \in t) \vee (y \in s \wedge z \in t))) \equiv \quad (4)$$

$$\equiv x \in rt + st \quad \square \quad (5)$$

1.5.5 $\emptyset^* = \varepsilon$

Wiemy, że $\emptyset a = \emptyset$ oraz $a\emptyset = \emptyset$. Wiemy również, że dla dowolnego języka L , w szczególności $L = \emptyset$ zachodzi $L^0 = \{\varepsilon\}$. Zatem:

$$x \in \emptyset^* \equiv x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} \emptyset^i \equiv x \in (\emptyset^0 + \emptyset^1 + \emptyset^2 + \dots) \equiv \quad (1)$$

$$\equiv x \in (\varepsilon + \varepsilon\emptyset + \varepsilon\emptyset\emptyset + \dots) \equiv \quad (2)$$

$$\equiv x \in \varepsilon \quad \square \quad (3)$$

1.5.6 $(r^*)^* = r^*$

Pokażmy, że domknięcie Kleene'ego jest idempotentne. Wyrażmy definicję za pomocą kwantyfikatorów:

$$x \in r^* \equiv x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} r^i \equiv (\exists_n) (x = x_1 \dots x_n \wedge (\forall_{i \in \{1 \dots n\}}) x_i \in r) \quad (1)$$

Skorzystajmy następnie dwukrotnie z tej definicji, aby rozwinąć lewą stronę:

$$x \in (r^*)^* \equiv (\exists_n) (x = x_1 \dots x_n \wedge (\forall_{i \in \{1 \dots n\}}) x_i \in r^*) \equiv \quad (2)$$

$$\equiv (\exists_n) (x = x_1 \dots x_n \wedge (\forall_{i \in \{1 \dots n\}}) (\exists_{m_i}) (x_i = x_{i_1} \dots x_{i_{m_i}} \wedge (\forall_{j \in \{1 \dots m_i\}}) x_{ij} \in r)) \equiv \quad (3)$$

$$\equiv (\exists_n) (\forall_{i \in \{1 \dots n\}}) (\exists_{m_i}) (\forall_{j \in \{1 \dots m_i\}}) (x = x_{11} \dots x_{1m_1} \dots x_{n1} \dots x_{nm_n} \wedge x_{ij} \in r) \equiv \quad (4)$$

$$\equiv (\exists_k) (x = x_1 \dots x_k \wedge (\forall_{i \in \{1 \dots k\}}) (x_i \in r)) \equiv \quad (5)$$

$$\equiv x \in r^* \quad \square \quad (6)$$

1.5.7 $(r^* s^*)^* = (r + s)^*$

Zawieranie ($\subseteq$):

Jeśli $y \in r^*$, to na pewno $y \in (r + s)^*$, ponieważ $r \subseteq r + s$.

Analogicznie $y \in s^* \implies y \in (r + s)^*$.

$$x \in (r^* s^*)^* \implies x \in ((r + s)^* (r + s)^*)^* = ((r + s)^*)^* = (r + s)^* \quad (1)$$

Widzimy zatem, że $(r^*s^*)^* \subseteq (r+s)^*$.

Zawieranie ($\supseteq$):

Jeśli $y \in r$, to na pewno $y \in r^*$, ponieważ $r \subseteq r^*$. Analogicznie $y \in s \implies y \in s^*$.

$$x \in (r+s)^* \implies x \in (r^*+s^*)^* \quad (2)$$

Następnie jeśli $y \in r^*$ lub $y \in s^*$, to na pewno $y \in r^*s^*$, ponieważ $r^* \subseteq r^*s^*$ oraz $s^* \subseteq r^*s^*$.

$$x \in (r^*+s^*)^* \implies x \in (r^*s^*)^* \quad (3)$$

Widzimy zatem, że $(r+s)^* \subseteq (r^*s^*)^*$.

Na mocy AE z powyższych zawieraniań wynika, że $(r^*s^*)^* = (r+s)^*$ $\square$.