

Teoretyczne Podstawy Informatyki

Rafał Włodarczyk

INA 6, 2026

Contents

1	Maszyna Turinga	1
1.1	Palindrom nad Alfabetem	2
1.2	Wynik działania Maszyny Turinga	2
1.3	Dodawanie Binarne i napisy nad 0,1	2
1.4	Konfiguracja Maszyny Turinga	2
2	k-Taśmowa Maszyna Turinga	3
2.1	Zastąpienie k-Taśmowej przez jednotaśmową	3
3	Niedeterminizm	3

Uniwersalne pojęcie **obliczenia** nie istnieje. Musimy wpieryw wybrać model - Maszyny Turinga, Rachunku Lambda.

1 Maszyna Turinga

Maszyna Turinga to (Q, q_0, Σ, δ) :

1. Q - skończony zbiór stanów
2. $q_0 \in Q$ - stan początkowy
3. Σ - skończony alfabet (oraz \smile (brak) dla pustych komórek)
4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\smile\}) \rightarrow (Q \cup \{\text{tak, nie, h}\}) \times (\Sigma \cup \{\smile\}) \times \{\rightarrow, \leftarrow, -\}$

oraz mamy nieskończoną taśmę.

1.1 Palindrom nad Alfabetem

Przykład. Palindrom nad Alfabetem $\{0, 1\}$

stan	0	1	\surd
p	$(q_0, \surd, \rightarrow)$	$(q_1, \surd, \rightarrow)$	{tak}
q_0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$(q_0, 1, \rightarrow)$	(q_2, \surd, \leftarrow)
q_1	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$(q_1, 1, \rightarrow)$	(q_3, \surd, \leftarrow)
q_2	(r, \surd, \leftarrow)	{nie}	{tak}
q_3	{nie}	(r, \surd, \leftarrow)	{tak}
r	$(r, 0, \leftarrow)$	$(r, 1, \leftarrow)$	(p, \surd, \rightarrow)

Uproszczenie zapisu: {tak} \equiv (tak, \surd , \rightarrow). Czas rozpoznania palindromu: $\mathcal{O}(n^2)$

1.2 Wynik działania Maszyny Turinga

Dla TM M i ciągu wejściowego X przez $M(X)$ oznaczamy wynik działania M na x .

- $M(x) = \text{tak}$ - mówimy, że M akceptuje x
- $M(x) = \text{nie}$ - mówimy, że M odrzuca x
- $M(x) = y$ - mówimy, że M zatrzymała się na h i na taśmie jest y (bez zbędnych \surd z lewej i prawej strony). Mówimy, że $M(x)$ obliczyło y .
- $M(x) = \nearrow$ - jeśli M na x nie kończy nigdy pracy (zapętla się).

1.3 Dodawanie Binarne i napisy nad 0,1

Przykład. Dodawanie binarne.

stan	0	1	\surd
q_0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$(q_0, 1, \rightarrow)$	(q_1, \surd, \leftarrow)
q_1	$(q_2, 1, \leftarrow)$	$(q_1, 0, \leftarrow)$	$(h, 1, -)$
q_2	$(q_2, 0, \leftarrow)$	$(q_2, 1, \leftarrow)$	(h, \surd, \rightarrow)

Dla maszyny M zachodzi $M(101) = 110$. Jeśli zmienię h na q_0 to zapętlamy dodawanie.

Przykład. Generujemy napisy nad $\{0, 1\}$

stan	0	1	\surd
q_0	$(q_0, 0, \rightarrow)$	$(q_0, 1, \rightarrow)$	(q_1, \surd, \leftarrow)
q_1	$(q_2, 1, \leftarrow)$	$(q_1, 0, \leftarrow)$	$(h, 0, -)$
q_2	$(q_2, 0, \leftarrow)$	$(q_2, 1, \leftarrow)$	(h, \surd, \rightarrow)

$M: 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots$

1.4 Konfiguracja Maszyny Turinga

Konfiguracją TM M nazywamy trójkę (q, α, β) , taką że:

- q jest aktualnym stanem
- α jest zawartością taśmy przed głowicą
- β jest zawartością taśmy po głowicy

- \vdash_M oznacza relację przejścia w jednym kroku przez maszynę M między konfiguracjami

Analogicznie \vdash_M^i to wyprowadzenie w i -krokach, \vdash_M^* w dowolnej ilości kroków.

$$\begin{aligned}
 x &= 010 \\
 (p, \varepsilon, 010) &\vdash \\
 (q_0, \varepsilon, 10) &\vdash \\
 (q_0, 1, 0) &\vdash \\
 (q_0, 10, \varepsilon) &\vdash \\
 (q_2, 1, 0) &\vdash \\
 (r, \varepsilon, 1) &\vdash \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(x) = \text{tak} &\iff (q_0, \varepsilon, x) \vdash_M^* (\text{tak}, *, *) \\
 M(x) = y &\iff (q_0, \varepsilon, x) \vdash_M^* (h, \alpha, \beta) \wedge y = \alpha\beta
 \end{aligned}$$

2 k-Taśmowa Maszyna Turinga

Zmienia się δ na:

$$\delta : Q \times \left(\sum \cup \{\smile\} \right)^k \rightarrow \left(Q \sum \{\text{tak, nie, h}\} \right) \times \left(\left(\sum \cup \{\smile\} \right) \times \{\rightarrow, \leftarrow, -\} \right)^k$$

Przykład. Palindrom nad alfabetem $\{0, 1\}$

stan	00	01	0 \smile	10	11	
q_0			$q_0, \rightarrow^0, \rightarrow^0$			$q_0, \rightarrow^1, \rightarrow^1$
q_1	$q_1, \leftarrow^0, -^0$	$\leftarrow^0 -^1$		$q_1, \leftarrow^1 -^0$	$q_1, \leftarrow^1 -^1$	
q_2	$q_2, \rightarrow\{\smile\}, \leftarrow\{\smile\}$	nie	-	nie	$q_2, \rightarrow\{\smile\} \leftarrow\{\smile\}$	
stan	1 \smile	$\smile 0$	$\smile 1$	$\smile \smile$		
q_0	$q_0, \leftarrow\{\smile\}, \leftarrow\{\smile\}$					
q_1	$q_2, \rightarrow\{\smile\}, -^0$	$q_2, \rightarrow\{\smile\}, -^1$	tak			
q_2	-	-	-	tak		

2.1 Zastąpienie k-Taśmowej przez jednotaśmową

Każda k -taśmowa TM M która na x pracuje w czasie $f(|x|)$ można zastąpić 1-taśmową TM M' taką, że:

1. $\forall x M(x) = M'(x)$
2. $M'(x)$ wykona co najwyżej $O(f(|x|)^2)$ kroków.

3 Niedeterminizm

$$\delta : Q \times \left(\sum \cup \{\smile\} \right) \rightarrow 2^{(Q \cup \{\text{tak, nie, h}\}) \times (\sum \cup \{\smile\}) \times \{\rightarrow, \leftarrow, -\}}$$

NTM M akceptuje x jeśli istnieje obliczenie $M(x)$ kończące się w stanie *tak*, odrzuca jeśli każde obliczenie kończy się w stanie *nie*.